ENS DE LYON
UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Fonction tau de Ramanujan

Élève
Martin BAGET

Enseignant
Sary DRAPPEAU

30 août 2022

Table des matières

1 Formes modulaires **2**
1.1 Fonction elliptique de Weierstrass et discriminant modulaire 2
1.2 Réseaux et formes modulaires 3
1.3 Formes modulaires 4
1.4 Majoration de Hecke 7

2 Conjectures de Ramanujan **7**
2.1 Résultats de Ramanujan sur les sommes de puissances de diviseurs 7
2.2 Énoncés et reformulations des conjectures 8
2.3 Opérateurs de Hecke 10
2.4 Preuve de Mordell des deux premières conjectures 11

3 Majoration de Rankin **12**
3.1 Représentation intégrale pour D 12
3.2 Prolongement analytique de D 14
3.3 Majorations du prolongement analytique 17
3.4 Formule de Perron 19

A Factorisation du discriminant modulaire depuis les travaux de Jacobi **22**

B Preuve directe de la factorisation du discriminant modulaire **25**

C Développements d'Euler de la cotangente et du sinus **26**

D Fonctions Gamma et Bêta d'Euler **27**

E Formules de Stirling **29**

F Fonction zêta de Riemann **31**

G Résultats classiques sur les formes modulaires **33**

1 Formes modulaires

1.1 Fonction elliptique de Weierstrass et discriminant modulaire

Weierstrass (1815 - 1897) a étudié, dans la continuité des travaux de Gauss (1777 - 1855), Abel (1802 - 1829) et Jacobi (1804 - 1851), les fonctions complexes avec deux périodes non colinéaires. Pour $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ avec $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{R}$, $L = \omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}$, il définit la fonction elliptique de Weierstrass associée

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in L\setminus\{0\}} \frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2}$$

Cette fonction admet ω_1 et ω_2 comme périodes. On pourra remarquer la similitude avec le développement de la cotangente qui peut se réécrire

$$\pi cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{z-n} - \frac{1}{n}$$

Il était attendu, d'après les travaux précédents sur les intégrales elliptiques, qu'une telle fonction vérifie une équation différentielle de la forme $\wp'(z)^2 = P(\wp(z))$ avec P un polynôme de degré 3 ou 4. Weierstrass a prouvé que l'on a en effet

Théorème 1 (Weierstrass)**.** *La fonction elliptique de Weierstrass vérifie l'équation différentielle*

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - 60G_4\wp(z) - 140G_6$$

où l'on définit pour $k \geqslant 3$ la série d'Eisenstein de poids k, $G_k = \sum_{\lambda \in L\setminus\{0\}} \frac{1}{\lambda^k}$.

Démonstration. La première étape est d'écrire le développement en série de Laurent de $\wp$ au voisinage de 0,

$$\begin{aligned}
\wp(z) &= \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in L\setminus\{0\}} \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{1}{(1-\frac{z}{\lambda})^2} - 1\right) \\
&= \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in L\setminus\{0\}} \frac{1}{\lambda^2} \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)\left(\frac{z}{\lambda}\right)^n \\
&= \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) G_{n+2} z^n \\
&= \frac{1}{z^2} + \sum_{m=1}^{+\infty} (2m+1) G_{2m+2} z^{2m}
\end{aligned}$$

puisque $G_n = 0$ pour n impair. En dérivant on a aussi celui de $\wp'$:

$$\wp'(z) = \frac{-2}{z^3} + 2\sum_{m=0}^{+\infty} (2m+2)(2m+3) G_{2m+4} z^{2m+1}$$

À partir de ces deux développements, on en déduit que

$$\wp(z)^3 = \frac{1}{z^6} + \frac{9G_4}{z^2} + 15G_6 + o(1)$$

$$\wp'(z)^2 = \frac{4}{z^6} - \frac{24G_4}{z^2} - 80G_6 + o(1)$$

d'où

$$\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 = -\frac{60G_4}{z^2} - 140G_6 + o(1)$$

puis

$$\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + 60G_4\wp(z) \underset{z\to 0}{\to} -140G_6$$

Ainsi la fonction $z \mapsto \wp'(z)^2 - 4\wp(z) + 60G_4\wp(z)$ n'a pas de pôle en 0. Par ω_1-périodicité et ω_2-périodicité, elle est holomorphe sur tout le plan complexe et bornée donc constante par le théorème de Liouville, égale à sa valeur en 0 $-140G_6$. C'est le résultat souhaité. □

À partir de cette équation est défini le discriminant modulaire

$$\Delta = \frac{1}{(2\pi)^{12}}((60G_4)^3 - 27(140G_6)^2)$$

Le résultat principal sur ce discriminant est qu'il peut être écrit comme un produit infini (la normalisation ayant été prise pour ne pas avoir de facteur devant le produit).

Théorème 2 (Jacobi, 1829 (?)). *Pour $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ avec $Im(\frac{\omega_2}{\omega_1}) > 0$, si l'on note $q = exp(2i\pi\frac{\omega_2}{\omega_1})$ alors*

$$\Delta = \omega_1^{12} q \prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^n)^{24}$$

Ce théorème n'est pas du tout évident. On considère généralement qu'il a été découvert par Jacobi en 1829 lors de l'étude de ses fonctions elliptiques (cosinus, sinus et delta amplitudinis). Jacobi cependant, utilisait un vocabulaire bien différent de celui présenté ci-dessus. Le lien entre ses résultats et ce théorème est présenté dans l'annexe A, et une preuve moderne du théorème est donnée dans l'annexe B (les deux annexes étant écrites avec les notations introduites au début de la sous-section "Formes modulaires").

1.2 Réseaux et formes modulaires

À partir de maintenant, les paramètres ω_1, ω_2 ne sont plus considérés comme fixes et sont donc écrits explicitement :

$$G_k = G_k(\omega_1, \omega_2)$$
$$\Delta = \Delta(\omega_1, \omega_2)$$
$$\lambda = \lambda(\omega_1, \omega_2)$$

Les premiers exemples de formes modulaires - et aussi ceux pour lesquels les notions sont les plus limpides - sont les séries d'Eisenstein. Étant définis comme somme sur un réseau, les symétries dudit réseau se retranscrivent comme des relations sur la fonction. Le point-clé est le suivant :

Proposition 1. *Pour $\omega_1, \omega_2, \omega_1', \omega_2' \in \mathbb{C}$ avec ω_1, ω_2 non colinéaires, ω_1', ω_2' non colinéaires, on a $\omega_1'\mathbb{Z} + \omega_2'\mathbb{Z} = \omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}$ si et seulement s'il existe $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ de déterminant ± 1 telle que $\begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$.*

Démonstration. Si l'on a $\begin{pmatrix}\omega_1' \\ \omega_2'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1 \\ \omega_2\end{pmatrix}$ avec $\begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ de déterminant ± 1, cela donne donne directement $\omega_1'\mathbb{Z} + \omega_2'\mathbb{Z} \subseteq \omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}$ et en inversant la matrice cela donne l'autre inclusion. Dans l'autre sens, les deux inclusions se traduisent matriciellement par $\begin{pmatrix}\omega_1' \\ \omega_2'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1 \\ \omega_2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\omega_1 \\ \omega_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a' & b' \\ c' & d'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1' \\ \omega_2'\end{pmatrix}$ pour deux matrices $\begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a' & b' \\ c' & d'\end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$. Les hypothèses de non-colinéarité impliquent (en prenant les parties réelles et imaginaires) que ces matrices envoient une base de $\mathbb{R}^2$ sur une base de $\mathbb{R}^2$, i.e. qu'elles sont inversibles. On a donc des matrices de $M_2(\mathbb{Z})$ d'inverses dans $M_2(\mathbb{Z})$, donc de déterminant ± 1. □

Corollaire 1. *Pour $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ non colinéaires, $\begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$, on a*

$$G_k(a\omega_1 + b\omega_2, c\omega_1 + d\omega_2) = G_k(\omega_1, \omega_2)$$

pour tout $k \geqslant 3$.

Démonstration. Une fois la proposition précédente connue, il s'agit simplement d'utiliser l'associativité des familles sommables ! □

Une telle équation est qualifiée d'équation de modularité : c'est la base de la définition d'une forme modulaire. Il y a en revanche quelques autres conditions techniques que nous verrons dans la section suivante.

Proposition 2. *Le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ est engendré par $T = \begin{pmatrix}1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$ et $-I_2$.*

Démonstration. Annexe G. □

Corollaire 2. *Une fonction f de deux variables complexes non colinéaires vérifie $f(c\omega_1 + d\omega_2, a\omega_1 + b\omega_2) = f(\omega_1, \omega_2)$ pour tout $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ si et seulement si $f(\omega_1 + \omega_2, \omega_2) = f(\omega_1, \omega_2)$, $f(-\omega_2, \omega_1) = f(\omega_1, \omega_2)$ et $f(-\omega_1, -\omega_2) = f(\omega_1, \omega_2)$.*

1.3 Formes modulaires

Pour étudier les formes modulaires plus aisément, et pour les définir dans un cadre plus général, il est commode de les voir comme fonction non pas de deux variables ω_1, ω_2 non colinéaires mais plutôt d'une variable $z = \frac{\omega_2}{\omega_1} \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. On se restreint même usuellement au demi-plan de Poincaré ou demi-plan supérieur $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} | Im(z) > 0\}$ car :

— pour les séries de Eisenstein ou le discriminant modulaire on peut écrire $f(1, -z) = f(-z, -1) = f(z, 1) = f(1, z)$ (action de S, homogénéité avec un exposant pair puis symétrie des variables) : on a donc une symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

— les écritures en fonction de $q = exp(2i\pi z)$, comme le développement en produit infini du discriminant, sont, on le verra, capitales dans la théorie, et ne sont généralement valables que sur ce domaine. Certaines formes modulaires non classiques ne sont d'ailleurs pas, de façon naturelle, définie sur le demi-plan inférieur.

Au lieu de considérer une fonction $f(\omega_1, \omega_2)$, on appelle donc plus couramment forme modulaire la fonction $f(z) = f(1, z)$ pour $z \in \mathcal{H}$. L'équation de modularité :

$$f(a\omega_1 + b\omega_2, c\omega_1 + d\omega_2) = f(\omega_1, \omega_2)$$

pour $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ devient alors

$$f(\frac{az+b}{cz+d}) = (cz+d)^k f(z)$$

en l'appliquant en $\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$. On notera que $\frac{az+b}{cz+d} \in \mathcal{H}$ car pour n'importe quels réels a, b, c, d, on a

$$Im(\frac{az+b}{cz+d}) = \frac{(ad-bc)Im(z)}{|cz+d|^2}$$

et donc il suffit que $ad - bc > 0$ pour stabiliser $\mathcal{H}$.

Tout cela permet d'énoncer (enfin !) la définition d'une forme modulaire classique.

Définition 1. *Soit $k \in \mathbb{Z}$. On appelle forme modulaire (classique) de poids k toute fonction holomorphe $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ vérifiant*

$$f(\frac{az+b}{cz+d}) = (cz+d)^k f(z)$$

pour tous $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$, $z \in \mathcal{H}$, et bornée quand $Im(z) \to +\infty$. On note $\mathcal{M}_k$ l'espace vectoriel des formes modulaires de poids k.

On dit qu'une forme modulaire est parabolique si elle tend vers 0 quand $Im(z) \to +\infty$.

On peut de plus résumer ce qui a déjà été vu (ou presque) dans la proposition suivante :

Proposition 3. — *Il n'existe pas de forme modulaire non nulle de poids impair.*

- *Soit $k \in \mathbb{Z}$ pair, et $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ holomorphe, avec $f(z)$ borné quand $Im(z) \to +\infty$. Alors f est une forme modulaire de poids k si et seulement si $f(z+1) = f(z)$ et $f(-\frac{1}{z}) = z^k f(z)$ pour tout $z \in \mathcal{H}$.*
- *G_k est une forme modulaire non nulle de poids k pour tout $k \geqslant 4$ pair.*
- *Δ est une forme modulaire de poids 12.*

Démonstration. — L'équation de modularité pour $-I_2$ s'écrit $f(z) = (-1)^k f(z)$: elle impose donc k pair et est alors automatique.

- Une fois dit que l'équation pour $-I_2$ était automatique, il s'agit (à quelques calculs près) du dernier résultat de la section précédente.
- L'équation de modularité a été vue. Ce sont bien des fonctions holomorphes, et bornées quand $Im(z) \to +\infty$ car on a même par théorème d'interversion des limites que $G_k(z) \underset{z \to +\infty}{\to} 2\zeta(k)$.
- Car plus généralement le produit d'une forme modulaire de poids k et d'une forme modulaire de poids l est une forme modulaire de poids $k+l$, et car l'espace des formes modulaires de poids k est une espace vectoriel.

□

Proposition 4. *Toute forme modulaire admet un développement en série de Fourier sans coefficients strictement négatifs, c'est-à-dire une écriture de la forme*

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n e^{2i\pi nz} = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n q^n$$

où l'on dénote, ici comme par la suite, $q = e^{2i\pi z}$. On a les développements en série de Fourier explicites

$$G_k(z) = 2\frac{(2i\pi)^k}{(k-1)!}\left(-\frac{B_k}{2k} + \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\sigma_{k-1}(n)q^n\right)$$

où $\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}$ et les (B_k) sont les nombres de Bernoulli.

Démonstration. Annexe G. □

Les coefficients de Fourier d'une forme modulaire, comme nous le verrons partiellement par la suite, ont souvent de nombreuses propriétés arithmétiques et sont ainsi intéressants à étudier. La fonction tau de Ramanujan est définie à partir de la première forme modulaire autre qu'une série d'Eisenstein

Définition 2. *La fonction tau de Ramanujan τ est la fonction arithmétique définie par les égalités*

$$\Delta(z) = \frac{1}{(2\pi)^{12}}((60G_4)^3 - 27(140G_6)^2) = q\prod_{n\in\mathbb{N}^*}(1-q^n)^{24} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\tau(n)q^n$$

La définition du discriminant modulaire donne ainsi une expression (inutilisable) de $\tau(n)$:

$$\tau(n) = 8000\sum_{a,b,c\in\mathbb{N},n=a+b+c}\sigma_3(a)\sigma_3(b)\sigma_3(c) - \frac{49}{12}\sum_{k=0}^{n}\sigma_5(k)\sigma_5(n-k)$$

où l'on note $\sigma_{k-1}(0) = -\frac{B_k}{2k} = \frac{\zeta(-(k-1))}{2}$.

Le développement en produit infini en donne une autre expression :

$$\tau(n) = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n\in[\![0;24]\!],n=i_1+2i_2+\ldots+ni_n}\prod_{k=1}^{n}(-1)^{i_k}\binom{24}{i_k}$$

qui est tout aussi inutilisable mis à part pour justifier le fait (pas du tout limpide à partir de la première expression) que $\tau(n) \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

En pratique, c'est bien la définition comme coefficient d'une forme modulaire qui permet de démontrer les propriétés de τ.

Proposition 5. *L'ensemble*

$$\mathcal{F} = \{z \in \mathcal{H} \mid |Re(z)| < \frac{1}{2}, |z| > 1\}$$

est un domaine fondamental pour l'action de $PSL_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathcal{H}$, c'est-à-dire que toute orbite rencontre $\overline{\mathcal{F}}$, et qu'une orbite ne peut rencontrer $\mathcal{F}$ qu'une seule fois.

Démonstration. Annexe G. □

Théorème 3. *La dimension de l'espace des formes modulaires de poids k est égale à*

- *0 si k est impair ou $k < 0$*
- *$\lfloor\frac{k}{12}\rfloor$ si k est positif et congru à 2 modulo 12*
- *$\lfloor\frac{k}{12}\rfloor + 1$ si k est positif, pair, et non congru à 2 modulo 12*

Démonstration. Annexe G. □

1.4 Majoration de Hecke

Théorème 4 (Hecke)**.** *Soit f une forme modulaire classique parabolique de poids k, dont on écrit (a_n) ses coefficients en série de Fourier. Alors $a_n = O(n^{k/2})$.*

Démonstration. On commence par écrire a_n sous forme intégrale :

$$a_n = \int_{a-1/2}^{a+1/2} f(z)exp(-2i\pi nz)dz$$

et ce pour tout $a \in \mathcal{H}$. Puisque $Im(\frac{az+b}{cz+d}) = \frac{Im(z)}{|cz+d|^2}$ pour $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$, l'équation de modularité donne

$$|Im(\frac{az+b}{cz+d})^{k/2}\Delta(\frac{az+b}{cz+d})| = |Im(z)^{k/2}\Delta(z)|$$

La fonction $z \mapsto |Im(z)^{k/2}\Delta(z)|$ est ainsi invariante par l'action de $SL_2(\mathbb{Z})$. f étant parabolique, cette fonction tend de plus vers 0 lorsque $Im(z) \to +\infty$. La description du domaine fondamental permet d'en déduire qu'elle est bornée sur celui-ci par une constante C, et donc par invariance sur $\mathcal{H}$ tout entier. Finalement, on trouve

$$a_n \leqslant C|Im(a)|^{-k/2}exp(2\pi nIm(a))$$

pour tout $a \in \mathcal{H}$. Avec $Im(a) = \frac{1}{n}$, on a le résultat souhaité. □

2 Conjectures de Ramanujan

2.1 Résultats de Ramanujan sur les sommes de puissances de diviseurs

Ramanujan a étudié dans son papier *On certain arithmetical functions* de 1916, comme dans plusieurs autres papiers publiés à la même époque, les fonctions sommes de diviseur

$$\sigma_r(n) = \sum_{d|n} d^r$$

pour $r \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Il prolonge cette définition en posant

$$\sigma_r(0) = \frac{1}{2}\zeta(-r)$$

sans donner la moindre intuition derrière cette définition. Dans le cadre de la théorie des formes modulaires cependant, ce terme s'interprète naturellement comme le coefficient de degré 0 correspondant dans le développement en séries de Fourier des séries d'Eisenstein.

Théorème 5 (Ramanujan, 1916)**.** *Pour $r, s \geqslant 3$ deux entiers impairs, on a*

$$\sum_{k=0}^{n} \sigma_r(k)\sigma_s(n-k) = \frac{r!\zeta(r+1)s!\zeta(s+1)}{(r+s+1)!\zeta(r+s+2)}\sigma_{r+s+1}(n) + O(n^{\frac{2}{3}(r+s+1)})$$

$$\sum_{k=0}^{n}\sigma_r(k)\sigma_1(n-k) = \frac{r!\zeta(r+1)\zeta(2)}{(r+2)!\zeta(r+3)}\sigma_{r+2}(n) - \frac{n}{2(r+1)}\sigma_r(n) + O(n^{\frac{2}{3}(r+2)})$$

$$\sum_{k=0}^{n}\sigma_1(k)\sigma_1(n-k) = \frac{\zeta(2)^2}{6\zeta(4)}\sigma_3(n)$$

Preuve de la première égalité. Dans le cadre de la théorie des formes modulaires (Ramanujan ne se plaçait pas dans celle-ci pour sa preuve), la première égalité découle simplement du fait que $\frac{G_{r+1}}{2\zeta(r+1)}\frac{G_{s+1}}{2\zeta(s+1)} - \frac{G_{r+s+2}}{2\zeta(r+s+2)}$ est une forme modulaire parabolique de poids $r+s+2$. Ses coefficients, qui correspondent au O dans la formule, sont donc en $O(n^{\frac{1}{2}(r+s)+1})$ par la majoration de Hecke (on obtient ainsi par cette méthode une meilleure majoration de l'erreur que celle de Ramanujan). □

Ramanujan cherche ensuite à étudier plus précisément le O pour les premières valeurs de r et s. Il prouve notamment qu'il n'y a pas de terme d'erreur lorsque $r+s+2 = 4, 6, 8, 10$ ou 14 (c'est un corollaire immédiat du théorème sur la dimension lorsque $r, s \geqslant 3$). Il met ensuite en évidence que pour les cas $r+s+2 = 12, 16, 18, 20, 22$ et 26, il y a bien un terme d'erreur dont il donne une expression grâce à la fonction τ qu'il définit comme nous l'avons fait (là encore, c'est facile grâce au théorème sur la dimension). Ramanujan étudie ensuite cette fonction et met en évidence certaines propriétés qu'elle semble posséder, notamment une majoration qui est souvent appelée la conjecture de Ramanujan sans autre précision.

2.2 Énoncés et reformulations des conjectures

On énonce souvent les conjectures de Ramanujan par les trois assertions suivantes.

Conjecture 1. *La fonction τ est multiplicative.*

Conjecture 2. *Pour p premier et $\alpha \in \mathbb{N}$, $\tau(p^{\alpha+2}) = \tau(p)\tau(p^{\alpha+1}) - p^{11}\tau(p^{\alpha})$.*

Conjecture 3. *Pour p premier, $|\tau(p)| \leqslant 2p^{11/2}$.*

Si Ramanujan a bien énoncé sa troisième conjecture tel quel, il n'avait pas en revanche écrit les deux premières conjectures directement mais plutôt en prédisant la factorisation suivante :

Proposition 6 (Ramanujan, 1916)**.** *Les deux premières conjectures sont équivalentes à l'égalité formelle*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\tau(n)}{n^z} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{\tau(p)}{p^z} + \frac{1}{p^{2z-11}}}$$

Démonstration. Supposons les deux conjectures vérifiées. La multiplicativité donne alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\tau(n)}{n^z} = \prod_p 1 + \frac{\tau(p)}{p^z} + \frac{\tau(p^2)}{p^{2z}} + ... = \prod_p S_p$$

où l'on a noté $S_p = \sum_{\alpha=0}^{+\infty}\frac{\tau(p^\alpha)}{p^{\alpha z}}$. La deuxième conjecture donne $\frac{\tau(p^{\alpha+2})}{p^{\alpha z}} = \tau(p)\frac{\tau(p^{\alpha+1})}{p^{\alpha z}} - p^{11}\frac{\tau(p^\alpha)}{p^{\alpha z}}$ pour $\alpha \in \mathbb{N}$. En sommant on trouve

$$p^{2z}(S_p - 1 - \frac{\tau(p)}{p^z}) = p^z\tau(p)(S_p - 1) - p^{11}S_p$$

d'où

$$S_p = \frac{p^{2z} + \tau(p)p^z - \tau(p)p^z}{p^{2z} - \tau(p)p^z + p^{11}} = \frac{p^{2z}}{p^{2z} - \tau(p)p^z + p^{11}} = \frac{1}{1 - \frac{\tau(p)}{p^z} + \frac{1}{p^{2z-11}}}$$

Réciproquement, supposons la factorisation vérifiée. On considère connu que le cosinus $cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est surjectif et l'on écrit $\frac{\tau(p)}{2p^{11/2}} = cos(\theta_p)$ (la troisième conjecture équivalant alors à $\theta_p \in \mathbb{R}$). Alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1 - \frac{\tau(p)}{p^z} + \frac{1}{p^{2z-11}}} &= \frac{1}{(1 - \frac{e^{i\theta_p}}{p^{z-11/2}})(1 - \frac{e^{-i\theta_p}}{p^{z-11/2}})} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p^{11n/2} e^{ni\theta_p}}{p^{nz}} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{p^{11m/2} e^{-mi\theta_p}}{p^{mz}} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta_p} e^{-i(n-k)\theta_p}) \frac{p^{11n/2}}{p^{nz}} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{sin((n+1)\theta_p)}{sin(\theta_p)} \frac{p^{11n/2}}{p^{nz}}
\end{aligned}$$

où l'on note par continuité $\frac{sin((n+1)\theta_p)}{sin(\theta_p)} = n + 1$ si $\theta_p = 0$. On en déduit la formule, déjà donnée par Ramanujan : si $n = p_1^{\alpha_1} ... p_r^{\alpha_r}$ avec $p_1, ..., p_r$ premiers distincts, alors

$$\tau(n) = p^{n\frac{11}{2}} \frac{sin((\alpha_1 + 1)\theta_{p_1})}{sin(\theta_{p_1})} ... \frac{sin((\alpha_r + 1)\theta_{p_r}}{sin(\theta_{p_r})}$$

ce qui donne immédiatement la multiplicativité. De plus pour p premier et $\alpha \in \mathbb{N}$ on a $sin((\alpha + 3)\theta_p) + sin((\alpha + 1)\theta_p) = 2sin((\alpha + 2)\theta_p)cos(\theta_p)$ d'où

$$\begin{aligned}
\tau(p^{\alpha+2}) &= p^{(\alpha+2)\frac{11}{2}} \frac{sin((\alpha + 3)\theta_p)}{sin(\theta_p)} \\
&= 2p^{\frac{11}{2}} cos(\theta_p).p^{(\alpha+1)\frac{11}{2}} \frac{sin((\alpha + 2)\theta_p)}{sin(\theta_p)} - p^{11}.p^{(\alpha+1)\frac{11}{2}} \frac{sin((\alpha + 1)\theta_p)}{sin(\theta_p)} \\
&= \tau(p)\tau(p^{\alpha+1}) - p^{11}\tau(p^{\alpha})
\end{aligned}$$

□

Proposition 7 (Ramanujan, 1916)**.** *Étant admises les deux premières conjectures, la troisième conjecture équivaut à $\tau(n) \leqslant d(n)n^{\frac{11}{2}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, où $d(n)$ est le nombre de diviseurs de n.*

Démonstration. Cet énoncé implique bien sûr la troisième conjecture qui correspond au cas des nombres premiers. Pour la réciproque, on reprend la formule

$$\tau(n) = p^{n\frac{11}{2}} \frac{sin((\alpha_1 + 1)\theta_{p_1})}{sin(\theta_{p_1})} ... \frac{sin((\alpha_r + 1)\theta_{p_r}}{sin(\theta_{p_r})}$$

vue dans la démonstration précédente. La troisième conjecture donne $\theta_p \in \mathbb{R}$ pour tout p premier. Le résultat découle alors de l'inégalité classique $|sin(n\theta)| \leqslant n|sin(\theta)|$ pour $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. □

2.3 Opérateurs de Hecke

Mordell (1888 - 1972) démontra les deux premières conjectures de Ramanujan dès 1917, en introduisant ce qui sera appelé par la suite les opérateurs de Hecke (1887 - 1947) qui les a étudiés en détails en 1937. L'idée de base est que si E est un ensemble stable par la multiplication par une matrice de $SL_2(\mathbb{Z})$, et f une forme modulaire de poids k, alors $(\omega_1, \omega_2) \mapsto \sum_{\gamma \in E} f(\gamma.(\omega_1, \omega_2))$ est également une forme modulaire de poids k. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, avec E l'ensemble des matrices à coefficients entiers de déterminant m, on obtient (quasiment) le m-ième opérateur de Hecke, noté T_m. Quasiment car cet ensemble E est infini et on somme donc en réalité sur le quotient $SL_2(\mathbb{Z})\backslash E$, et que l'on place traditionnellement un coefficient devant (pour que les coefficients de Fourier de $T_m f$ soient des polynômes à coefficients entiers en ceux de f). La définition précise du m-ième opérateur de Hecke sur l'espace des formes modulaires de poids k est donc

$$T_m f(\omega_1, \omega_2) = m^{k-1} \sum_{\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})\backslash E} f(\gamma.(\omega_1, \omega_2))$$

Proposition 8. *L'ensemble des matrices* $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ *avec* $a, d \in \mathbb{N}^*$, $ad = m$ *et* $b \in [\![0; d[\![$ *forme un système de représentants de* $SL_2(\mathbb{Z})\backslash E$.

Démonstration. Partant de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$, on se ramène à une matrice avec $c = 0$ en répétant les deux opérations

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ na + c & nb + d \end{pmatrix}$$

$$S \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

pour $n \in \mathbb{Z}$. En effet, la première permet de remplacer c par son reste modulo a, puis la deuxième d'inverse les rôles de a et c. On répète ensuite jusqu'à arriver à $c = 0$ et, quitte à multiplier par $-I_2$, $a, d \in \mathbb{N}^*$. Une fois cela acquis l'action de T permet de se ramener à $b \in [\![0; d[\![$:

$$T^n \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & nd + b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

pour $n \in \mathbb{Z}$.

Considérons maintenant deux matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix}$ de la forme annoncée. Leur rapport s'écrit

$$AB^{-1} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d' & -b' \\ 0 & a' \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} ad' & a'b - ab' \\ 0 & a'd \end{pmatrix}$$

S'il est à coefficients entiers, on a donc $m | a\frac{m}{a'}$ soit $a' | a$ et $m | a'\frac{m}{a}$ soit $a | a'$ donc $a = a'$, $d = d'$, puis $m | a'b - ab' = a(b - b')$ avec $|b - b'| < d$ donc $|a(b - b')| < m$ d'où $b = b'$ et enfin $A = B$. $\square$

On peut donc écrire une expression explicite du m-ième opérateur de Hecke avec f vue comme une fonction de $z \in \mathcal{H}$

$$T_m f(z) = m^{k-1} \sum_{ad=m} \frac{1}{d^k} \sum_{b=0}^{d-1} f(\frac{az+b}{d})$$

Cette formule donne immédiatement que si f est parabolique, alors $T_m f$ l'est aussi. Elle donne aussi la...

Proposition 9. *Notons* $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n q^n$ *et* $T_m f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n q^n$. *Alors*

$$b_n = \sum_{a|m \ et \ a|n} a_{nm/a^2} a^{k-1}$$

Démonstration. Il s'agit d'un simple calcul,

$$\begin{aligned} T_m f(z) &= m^{k-1} \sum_{ad=m} \sum_{b=0}^{d-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{d^k} exp(2in\pi \frac{az+b}{d}) \\ &= m^{k-1} \sum_{ad=m} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{d^k} exp(2i\pi \frac{na}{d} z) \sum_{b=0}^{d-1} exp(2i\pi \frac{nb}{d}) \\ &= m^{k-1} \sum_{ad=m} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{a_{ld}}{d^{k-1}} exp(2i\pi laz) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (\sum_{a|m \ et \ a|n} a_{nm/a^2} a^{k-1}) q^n \end{aligned}$$

□

2.4 Preuve de Mordell des deux premières conjectures

Une fois les opérateurs de Hecke étudiés, les deux premières conjectures de Ramanujan tombent presque immédiatement.

Théorème 6 (Mordell, 1917)**.** $\tau(nm) = \tau(n)\tau(m)$ *si* n *et* m *sont premiers entre eux, et* $\tau(p^{\alpha+2}) = \tau(p)\tau(p^{\alpha+1}) - p^{11}\tau(p^\alpha)$ *pour* p *premier et* $\alpha \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, $T_m \Delta$ est une forme modulaire parabolique de poids 12 donc elle est colinéaire à Δ. Or on a $\Delta = q + o(q)$ et $T_m \Delta = \tau(m)q + o(q)$ d'où $T_m \Delta = \tau(m)\Delta$. En identifiant les coefficients on trouve que pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\tau(m)\tau(n) = \sum_{a|m \ et \ a|n} \tau(nm/a^2) a^{11}$$

On en déduit qu'en effet $\tau(nm) = \tau(n)\tau(m)$ si n et m sont premiers entre eux, et que pour p premier, $\alpha \in \mathbb{N}$, on a

$$\tau(p)\tau(p^{\alpha+1}) = \tau(p^{\alpha+2}) + p^{11}\tau(p^\alpha)$$

□

3 Majoration de Rankin

La troisième conjecture de Ramanujan, qui affirme que $|\tau(p)| \leqslant 2p^{5,5}$ pour p premier, et qui implique que $\tau(n) = O(n^{5,5+\epsilon})$ pour tout $\epsilon > 0$, n'a été démontrée qu'en 1974 par Deligne (1944 -). Il parvient en 1968 à ramener cette conjecture à celles de Weil sur les variétés algébriques sur les corps finis, dont à l'époque une avait été résolue par Dwork (1923 - 1998) en 1958, et deux par Grothendieck (1928 - 2014) au milieu des années 60. En 1974, c'est en réalité la dernière des conjectures de Weil que résout Deligne. Jusque là, plusieurs majorations plus faibles de la fonction tau avait été données, notamment une par Rankin (1915 - 2001) en 1939 qui a inspiré Deligne lors de la résolution finale du problème.

Théorème 7 (Rankin, 1939)**.** *On a* $\sum_{k=1}^{n} \tau(k)^2 = \alpha n^{12} + O(n^{12-2/5})$ *où*

$$\alpha = \frac{(4\pi)^{11}}{\Gamma(12)} \int |\Delta(z)|^2 (Im(z))^{10} d\mu$$

l'intégrale étant prise sur le domaine fondamental, avec μ *la mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}^2$.

En prenant la différence on trouve une majoration plus forte pour $\tau(n)$: on a $\tau(n)^2 = \alpha(n^{12} - (n-1)^{12}) + O(n^{12-2/5})$ et puisque $n^{12} - (n-1)^{12} = O(n^{11})$ on trouve $\tau(n) = O(n^{6-1/5}) = O(n^{5,8})$. Langlands (1936 -) avait justifié en 1970 que la conjecture de Ramanujan découlerait d'une généralisation du résultat de Rankin pour tous les exposants pairs, là où Rankin se restreint à l'exposant 2. La conjecture de Sato-Tate pour la fonction tau a aussi démontrée en considérant des séries définies avec les puissances paires de τ.

Les deux premières sous-sections reprennent les idées de Rankin en 1939. Rankin invoquait ensuite un théorème de Landau (1877 - 1938) pour trouver sa majoration. Les deux dernières sous-sections présentent une tentative naïve pour aboutir au résultat de Rankin, qui n'a pas abouti (il manque un résultat technique) mais qui permet de comprendre ce résultat et de conjecturer que le $O(n^{12-2/5}) = O(n^{11,6})$ pourrait même être amélioré en un $O(n^{11,5+\epsilon})$ pour tout $\epsilon > 0$.

3.1 Représentation intégrale pour D

La démonstration du résultat de Rankin repose sur l'étude de la série de Dirichlet

$$D : s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tau(n)^2}{n^s}$$

La première étape est de remarquer que cette série converge absolument pour tout $s \in \mathbb{C}$ avec $Re(s) > 13$: c'est une conséquence de la majoration de Hecke $\tau(n) = O(n^6)$. La deuxième étape est de voir que cette série admet une représentation comme une intégrale sur le domaine fondamental.

Lemme 1. *Pour* $s \in \mathbb{C}$ *avec* $Re(s) > 13$*, on a*

$$D(s) = \frac{(4\pi)^s}{\Gamma(s)} \int |\Delta(z)|^2 (Im(z))^{s-1} d\mu$$

où l'intégrale est prise sur l'ensemble des $z \in \mathcal{H}$ *avec* $|Re(z)| \leqslant \frac{1}{2}$.

Démonstration. On a en effet pour $a \in \mathcal{H}$, $\int_{-1/2}^{1/2} |\Delta(a+x)|^2 dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \tau(n)^2 exp(-4\pi n Im(a))$ puis en appliquant la transformation de Mellin,

$$\int |\Delta(z)|^2 (Im(z))^{s-1} d\mu = \int_0^{+\infty} \int_{-1/2}^{1/2} |Delta(x+iy)|^2 dx \; y^{s-1} dy$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \tau(n)^2 \int_0^{+\infty} exp(-4\pi n y) y^{s-1} dy = \frac{\Gamma(s)}{(4\pi)^s} D(s)$$

□

Lemme 2. *Pour $s \in \mathbb{C}$ avec $Re(s) > 13$, on a*

$$D(s) = \frac{(4\pi)^s}{\Gamma(s)} \int_{\mathcal{F}} |\Delta(u)|^2 (Im(u))^{s-1} E(s,u) d\mu$$

où l'on a défini pour $u \in \mathcal{H}$:

$$E(s,u) = 1 + \sum_{c \in \mathbb{N}^*,\ d \in \mathbb{Z},\ pgcd(c,d)=1} \frac{1}{|cu+d|^{2(s-11)}}$$

.

Démonstration. Il s'agit de voir que le domaine $\{z \in \mathcal{H} | |Re(z)| \leqslant \frac{1}{2}\}$ peut s'écrire comme une union de parties de la forme $\gamma\mathcal{F}$ pour γ parcourant une famille donnée de représentants du quotient $< T > \backslash PSL_2(\mathbb{Z})$. L'intégrande étant 1-périodique, on peut même écrire

$$D(s) = \frac{(4\pi)^s}{\Gamma(s)} \sum_{\gamma} \int_{\gamma\mathcal{F}} |\Delta(z)|^2 (Im(z))^{s-1} d\mu$$

où la somme porte sur n'importe quelle famille de représentants du quotient. Alors par un changement de variable, on obtient

$$D(s) = \frac{(4\pi)^s}{\Gamma(s)} \sum_{\gamma} \int_{\mathcal{F}} |(cu+d)^{12} \Delta(u)|^2 (\frac{Im(u)}{|cu+d|^2})^{s-1} \frac{d\mu}{|cu+d|^4}$$
$$= \frac{(4\pi)^s}{\Gamma(s)} \int_{\mathcal{F}} |\Delta(u)|^2 (Im(u))^{s-1} (\sum_{\gamma} \frac{1}{|cu+d|^{2(s-11)}}) d\mu$$

On a pour $n \in \mathbb{Z}$

$$T^n \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+nc & b+nd \\ c & d \end{pmatrix}$$

Travailler avec $PSL_2(\mathbb{Z})$ revient à imposer $c \geqslant 0$, et $a = d = 1$ si $c = 0$. Si $c = 0$, il n'y a qu'une seule classe d'équivalence dont l'identité est un représentant qui donne un terme 1 dans la somme. Si $c > 0$, pour chaque $d \in \mathbb{Z}$ premier avec c, on a également une seule classe d'équivalence. En effet, pour deux matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c & d \end{pmatrix}$, on a $ad - bc = 1 = a'd - b'c$ ce qui donne avec le lemme de Gauss que $\frac{a-a'}{c} = \frac{b-b'}{d} \in \mathbb{Z}$. Cela donne bien la somme annoncée. □

3.2 Prolongement analytique de D

Rankin démontre, en utilisant une méthode analogue à celle utilisée pour le prolongement de la fonction zêta de Riemann, que pour $u \in \mathcal{H}$ la série $s \mapsto E(s,u)$ admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe, avec des pôles et des résidus connus. Le prolongement de D et ses propriétés analytiques s'en déduisent.

Lemme 3. *Pour $s \in \mathbb{C}$ avec $Re(s) > 13$, $u \in \mathcal{H}$,*

$$E(s,u) = \frac{\pi^{s-11}}{2\zeta(2(s-11))\Gamma(s-11)} \int_0^{+\infty} (\Theta(u,t)-1)t^{s-11}\frac{dt}{t}$$

où $\Theta(u,t) = \sum_{(c,d)\in\mathbb{Z}^2} e^{-\pi|cu+d|^2 t}$ *pour* $t > 0$.

Démonstration. La première étape est de remarquer que

$$2\zeta(2(s-11))E(s,u) = \sum_{(c,d)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}} \frac{1}{|cu+d|^{2(s-11)}}$$

On peut alors écrire

$$\begin{aligned}
2\zeta(2(s-11))E(s,u) &= \frac{\pi^{s-11}}{\Gamma(s-11)} \sum_{(c,d)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}} \int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{t}{\pi|cu+d|^2}\right)^{s-11}\frac{dt}{t} \\
&= \frac{\pi^{s-11}}{\Gamma(s-11)} \sum_{(c,d)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}} \int_0^{+\infty} e^{-\pi|cu+d|^2 t'}(t')^{s-11}\frac{dt'}{t'} \\
&= \frac{\pi^{s-11}}{\Gamma(s-11)} \int_0^{+\infty} (\Theta(u,t')-1)(t')^{s-11}\frac{dt'}{t'}
\end{aligned}$$

□

Lemme 4. *Pour $u \in \mathcal{H}$, $t > 0$, on a*

$$\Theta\left(u, \frac{t}{Im(u)}\right) = \frac{1}{t}\Theta\left(u, \frac{1}{tIm(u)}\right)$$

Démonstration. On donne une preuve reposant sur une version plus générale de l'équation de modularité de la fonction thêta de Jacobi qui découle de la formule sommatoire de Poisson :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi(n+x)^2 t} = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 \frac{1}{t} + 2i\pi n x}$$

pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. On applique l'égalité une fois pour d puis une fois pour c :

$$\begin{aligned}
\Theta(u,t) &= \sum_{(c,d)\in\mathbb{Z}^2} e^{-\pi c^2 Im(u)^2 t} e^{-\pi(cRe(u)+d)^2 t} \\
&= \sum_{c\in\mathbb{Z}} e^{-\pi c^2 Im(u)^2 t} \sum_{d\in\mathbb{Z}} e^{-\pi(cRe(u)+d)^2 t} \\
&= \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{c\in\mathbb{Z}} e^{-\pi c^2 Im(u)^2 t} \sum_{d\in\mathbb{Z}} e^{-\pi d^2 \frac{1}{t} + 2i\pi dcRe(u)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{d\in\mathbb{Z}} e^{-\pi d^2 \frac{1}{t}} \sum_{c\in\mathbb{Z}} e^{-\pi(c^2 Im(u)^2 - 2icdRe(u))} \\
&= \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{d\in\mathbb{Z}} e^{-\pi d^2 \frac{1}{t}} \sum_{c\in\mathbb{Z}} e^{-\pi(c^2 - 2c\frac{idRe(u)}{Im(u)^2 t})Im(u)^2 t} \\
&= \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{d\in\mathbb{Z}} e^{-\pi d^2 \frac{1}{t}} e^{\pi(\frac{idRe(u)}{Im(u)^2 t})^2 Im(u)^2 t} \sum_{c\in\mathbb{Z}} e^{-\pi(c - \frac{idRe(u)}{Im(u)^2 t})^2 Im(u)^2 t} \\
&= \frac{1}{tIm(u)} \sum_{d\in\mathbb{Z}} e^{-\pi d^2 \frac{1}{t}} e^{\pi(\frac{idRe(u)}{Im(u)^2 t})^2 Im(u)^2 t} \sum_{c\in\mathbb{Z}} e^{-\pi c^2 \frac{1}{Im(u)^2 t} - 2i\pi c \frac{idRe(u)}{Im(u)^2 t}} \\
&= \frac{1}{tIm(u)} \sum_{(c,d)\in\mathbb{Z}^2} e^{-\pi(|u|^2 d^2 + 2cdRe(u) + c^2)\frac{1}{tIm(u)^2}} \\
&= \frac{1}{tIm(u)} \sum_{(c,d)\in\mathbb{Z}^2} e^{-\pi|du+c|^2 \frac{1}{tIm(u)^2}} \\
&= \frac{1}{tIm(u)} \Theta(u, \frac{1}{tIm(u)^2})
\end{aligned}$$

On obtient le résultat en remplaçant dans cette égalité t par $\frac{t}{Im(u)}$. □

Lemme 5. *Pour $u \in \mathcal{H}$, la fonction $s \mapsto E(s,u)$ admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe. De plus la fonction*

$$s \mapsto 2(\frac{Im(u)}{\pi})^{s-11}\Gamma(s-11)\zeta(2(s-11))E(s,u)$$

est invariante par la transformation $s \mapsto 23 - s$ et admet exactement deux pôles, en 11 et 12, simples et de résidus 1.

Démonstration. L'équation fonctionnelle précédente se réécrit de façon plus symétrique en fonction de $\tilde{\Theta}(u,t) = \Theta(u, \frac{t}{Im(u)})$:

$$\tilde{\Theta}(u,t) = \frac{1}{t}\tilde{\Theta}(u, \frac{1}{t})$$

On a

$$\begin{aligned}
E(s,u) &= \frac{\pi^{s-11}}{2\zeta(2(s-11))\Gamma(s-11)} \int_0^{+\infty} (\Theta(u,t) - 1)t^{s-11}\frac{dt}{t} \\
&= \frac{\pi^{s-11}}{2\zeta(2(s-11))\Gamma(s-11)Im(u)^{s-11}} \int_0^{+\infty} (\tilde{\Theta}(u,t) - 1)t^{s-11}\frac{dt}{t}
\end{aligned}$$

On coupe l'intégrale en 1 et on transforme la partie proche de 0 qui est celle dont la convergence est limitée à $Re(s) > 12$:

$$\int_0^1 (\tilde{\Theta}(u,t)-1)t^{s-12}dt = \int_1^{+\infty} (\tilde{\Theta}(u,\frac{1}{t'})-1)t'^{12-s}t'^{-2}dt'$$

où $t' = \frac{1}{t}$. On trouve

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} (t'\tilde{\Theta}(u,t')-t'+t'-1)t'^{10-s}dt' &= \int_1^{+\infty} (\tilde{\Theta}(u,t')-1)t'^{11-s}dt' + \int_1^{+\infty} (t'-1)t'^{10-s}dt' \\ &= \int_1^{+\infty} (\tilde{\Theta}(u,t')-1)t'^{11-s}dt' + \frac{1}{s-12} - \frac{1}{s-11}\end{aligned}$$

d'où

$$E(s,u) = \frac{\pi^{s-11}}{2\zeta(2(s-11))\Gamma(s-11)Im(u)^{s-11}}\left(\int_1^{+\infty} (\tilde{\Theta}(u,t)-1)(t^{s-12}+t^{11-s})dt + \frac{1}{s-12} - \frac{1}{s-11}\right)$$

Le lemme découle de cette expression. □

Lemme 6. *La série définissant D converge absolument pour tout s avec $Re(s) > 12$ et admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe. De plus la fonction*

$$\psi : s \mapsto (2\pi)^{-2s}\Gamma(s)\Gamma(s-11)\zeta(2(s-11))D(s)$$

est invariante par la transformation $s \mapsto 23-s$ et admet exactement deux pôles, en 11 et 12, simples et de résidus

$$\frac{1}{2\pi^{11}}\int_{\mathcal{F}} |\Delta(u)|^2 Im(u)^{10}d\mu$$

En conséquence, les pôles de D sont exactement : 12, et les $11+\frac{\rho}{2}$ pour ρ un zéro non trivial de la fonction zêta. À part 12, ses pôles sont donc tous compris dans la bande de partie réelle comprise entre 11 et $11+\frac{1}{2}$. De plus, le résidu de D en 12 est égal à 12α.

Démonstration. Le lemme 2 se réécrit

$$\psi(s) = \frac{1}{2\pi^{11}}\int_{\mathcal{F}} |\Delta(u)|^2 Im(u)^{10}\phi(s,u)d\mu$$

où $\phi(s,u) = 2(\frac{Im(u)}{\pi})^{s-11}\Gamma(s-11)\zeta(2(s-11))E(s,u)$ vérifie comme vu dans la preuve du lemme 5

$$\phi(s,u) = \int_1^{+\infty} (\tilde{\Theta}(u,t)-1)(t^{s-12}+t^{11-s})dt + \frac{1}{s-12} - \frac{1}{s-11}$$

Il faut majorer ϕ pour vérifier qu'il est intégrable sur $\mathcal{F}$ pour toutes les valeurs de $s \in \mathbb{C}$ différentes de 11 et 12. Pour cela on réutilise l'égalité ayant servi de base au lemme 4, on écrit

$$\begin{aligned}\tilde{\Theta}(u,t) - 1 &= \sum_{(c,d)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}} e^{-\pi|cu+d|^2\frac{t}{Im(u)}} \\ &= 2\sum_{d\in\mathbb{N}^*} e^{-\pi d^2\frac{t}{Im(u)}} + 2\sum_{c\in\mathbb{N}^*} e^{-\pi c^2 Im(u)t}\sum_{d\in\mathbb{Z}} e^{-\pi(cRe(u)+d)^2\frac{t}{Im(u)}}\end{aligned}$$

Or pour $c \in \mathbb{N}^*$,

$$|\sum_{d\in\mathbb{Z}} e^{-\pi(cRe(u)+d)^2\frac{t}{Im(u)}}| = |\sqrt{\frac{Im(u)}{t}}\sum_{d\in\mathbb{Z}} e^{-\pi d^2\frac{Im(u)}{t}+2i\pi dcRe(u)}| \leqslant \sqrt{\frac{Im(u)}{t}}\sum_{d\in\mathbb{Z}} e^{-\pi d^2\frac{Im(u)}{t}} = \sum_{d\in\mathbb{Z}} e^{-\pi d^2\frac{t}{Im(u)}}$$

d'où

$$|\tilde{\Theta}(u,t) - 1| \leqslant 2S(\frac{t}{Im(u)}) + 2S(tIm(u))(1 + 2S(\frac{t}{Im(u)}))$$

où $S(\lambda) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} e^{-\pi\lambda n^2}$ pour $\lambda > 0$ vérifie

$$S(\lambda) \leqslant e^{-\pi\lambda} + \int_1^{+\infty} e^{-\pi\lambda t^2}dt \leqslant e^{-\pi\lambda} + \int_1^{+\infty} e^{-\pi\lambda t}dt = e^{-\pi\lambda}(1 + \frac{1}{\pi\lambda})$$

d'où

$$|\tilde{\Theta}(u,t) - 1| \leqslant 2e^{-\pi\frac{t}{Im(u)}}(1 + \frac{Im(u)}{\pi t}) + 2e^{-\pi t Im(u)}(1 + \frac{1}{\pi t Im(u)})(3 + \frac{2Im(u)}{\pi t})$$

On déduit de cela que pour $s \in \mathbb{C}\setminus\{11;12\}$ fixé, on a $\phi(s,u) = O(Im(u)^{max(Re(s)-10;13-Re(s))})$ et donc, comme $|\Delta(u)|$ décroît exponentiellement avec $Im(u)$, que l'expression de ψ en fonction de ϕ permet d'étendre ψ en une fonction méromorphe sur tout le plan complexe, avec les deux seuls pôles simples et leurs résidus comme annoncés. Les pôles de D s'en déduisent.

Il reste à justifier que la série définissant D converge pour tout $s \in \mathbb{C}$ avec $Re(s) > 12$. Cela découle du fait que ces coefficients sont tous positifs (puisque des carrés d'entiers), et donc nécessairement l'abscisse de convergence absolue correspond au plus grand pôle sur l'axe réel. D'après ce qui précède, il s'agit de 12. □

3.3 Majorations du prolongement analytique

Lemme 7 (Principe de Phragmén-Lindelöf)**.** *On considère une fonction f holomorphe pour tous les complexes z vérifiant $Re(z) \in [\sigma_1;\sigma_2]$ avec $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}$ fixés. On suppose qu'il existe $M > 0$, $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ tels que $|f(\sigma_1 + i\tau)| \leqslant M|\tau|^{\mu_1}$, $|f(\sigma_2 + i\tau)| \leqslant M|\tau|^{\mu_2}$ pour tout $\tau \in \mathbb{R}$. On suppose aussi que pour tout $\eta > 0$, on a $|f(\sigma + i\tau)| = o(e^{\eta\tau^2})$ quand $|\tau| \to +\infty$ uniformément pour $\sigma \in [\sigma_1;\sigma_2]$. Alors il existe une constante $K \geqslant 1$ ne dépendant que de σ_1 et σ_2 telles que pour $\sigma \in [\sigma_1;\sigma_2]$, on a $|f(\sigma + i\tau)| \leqslant KM|\tau|^{\mu(\sigma)}$ pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, où $\mu(\sigma) = \frac{\sigma-\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1}\mu_2 + \frac{\sigma_2-\sigma}{\sigma_2-\sigma_1}\mu_1$.*

Démonstration. Considérons déjà le cas $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Pour $\epsilon > 0$, on considère la fonction $g(z) = e^{\epsilon z^2} f(z)$. Alors $|g(z)| = e^{\epsilon(Re(z)^2 - Im(z)^2)}|f(z)| \leqslant e^{\epsilon(\sigma_2^2 - Im(z)^2)}|f(z)| \underset{|Im(z)|\to+\infty}{\to} 0$. On peut donc trouver un réel $T > 0$, tel que $|g(z)| \leqslant e^{\epsilon\sigma_2^2} M$ pour tout z vérifiant $|Im(z)| \geqslant T$. En appliquant le principe du maximum sur le rectangle délimité par les droites $Re(z) = \sigma_1$, $Re(z) = \sigma_2$, $Im(z) = T$ et $Im(z) = -T$, il vient que $|g(z)| \leqslant e^{\epsilon\sigma_2^2} M$ pour tous les z considérés. En passant à la limite pour $\epsilon \to 0$, cette inégalité devient $|f(z)| \leqslant M$.

On revient au cas général. On considère la fonction $h(z) = (-z^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 1)^{\mu(z)/2}$ où μ est la fonction linéaire prenant la valeur μ_1 et σ_1, et μ_2 en σ_2, et le logarithme considéré est la branche principale (la constante $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 1$ ayant été ajoutée pour que $Re(-z^2+\sigma_1^2+\sigma_2^2+1) \geqslant 1$ quel que soit z). Si $z = \sigma + i\tau$ et $h(z) = az+b$, avec $\sigma, \tau, a, b \in \mathbb{R}$, on a donc $h(z) = exp(\frac{1}{2}(\mu(\sigma) + ai\tau)ln(\tau^2 - \sigma^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 1 - 2i\sigma\tau))$ d'où

$$\begin{aligned}|h(z)| = exp(\mu(\sigma)ln(|\tau|) + \frac{1}{2}\mu(\sigma)Re(ln(1 + \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 1 - \sigma^2 - 2i\sigma\tau}{\tau^2})) \\ - \frac{a}{2}\tau Im(ln(1 + \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 1 - \sigma^2 - 2i\sigma\tau}{\tau^2})))\end{aligned}$$

On a donc, à σ fixé,

$$|h(\sigma + i\tau)| \sim e^{a\sigma}|\tau|^{\mu(\sigma)}$$

et ce uniformément selon σ. Comme de plus h ne s'annule jamais, on peut donc introduire deux constantes $C \geqslant c > 0$ telles que

$$c|\tau|^{\mu(\sigma)} \leqslant |h(z)| \leqslant C|\tau|^{\mu(\sigma)}$$

pour tous les z considérés. Le résultat (avec $K = \frac{C}{c}$) découle alors de l'écriture

$$f = \frac{f}{h}.h$$

et de l'utilisation du cas précédent à la fonction f/h qui est majorée par M/c sur les droites $Re(z) = \sigma_1$ et $Re(z) = \sigma_2$. □

Lemme 8. *Soit $\epsilon, \delta > 0$. Alors il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $\sigma \in [11 + \frac{1}{2} + \delta; 12 + \epsilon]$, on a $|D(\sigma + i\tau)| \leqslant M|\tau|^{\mu(\sigma)}$ pour tout $\tau \in \mathbb{R}$ avec $|\tau|$ assez grand, où*

$$\mu(\sigma) = 24 + 2(\epsilon - \sigma)$$

Démonstration. On considère la fonction $f(s) = (s - 11 - \frac{1}{2})(s - 12)\zeta(2(s - 11))D(s)$ qui est holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier, et on applique le principe de Phragmén-Lindelöf avec $\sigma_1 = 11 - \epsilon$, $\sigma_2 = 12 + \epsilon$, μ_1 à déterminer et $\mu_2 = 2$. Celui-ci peut bien être appliqué car

- pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$, $|\zeta(\sigma+i\tau)|$ est en O d'une puissance de τ : c'est une conséquence de son équation fonctionnelle (voir annexe F), de la formule de Stirling verticale (voir annexe E) et du principe de Phragmén-Lindelöf appliqué à $s \mapsto (s - 1)\zeta(s)$.
- de la majoration dans la preuve du lemme 6 qui prouve que $\psi(s)$ est en $O(1)$ quand $|\tau| \to +\infty$, et donc, avec la formule de Stirling verticale et le point précédent, que $D(s)$ est en O d'un polynôme multiplié par $e^{\pi|\tau|}$.

Pour trouver μ_1, les deux ingrédients sont la formule de Stirling verticale (voir annexe E) et l'équation fonctionnelle de la fonction ψ qui donne $\psi(\sigma_1 + i\tau) = \psi(\sigma_2 + i\tau)$ pour tout $\tau \in \mathbb{R}$. On a pour $|\tau| \to +\infty$,

$$\psi(\sigma_2 + i\tau) = O(|\tau|^{2\sigma_2 - 12} e^{-\pi|\tau|})$$

$$\zeta(2(\sigma_1 + i\tau - 11))D(\sigma_1 + i\tau) = O(\frac{|\tau|^{2\sigma_2-12}e^{-\pi|\tau|}}{|\tau|^{2\sigma_1-12}e^{-\pi|\tau|}}) = O(|\tau|^{2+4\epsilon})$$

On peut donc prendre $\mu_1 = 4(1+\epsilon)$. Le principe de Phragmén-Lindelöf donne alors une constante $C > 0$ telle que pour tout $s = \sigma + i\tau$ avec $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$, $\sigma \in [11-\epsilon, 12+\epsilon]$,

$$|f(s)| \leqslant C|\tau|^{26+2(\epsilon-\sigma)}$$

Il reste à voir que la fonction zêta est minorée sur tout demi-plan $Re(z) \geqslant a$ avec $a > 1$. Cela se fait en écrivant l'inverse de la fonction zêta avec la fonction de Mobiüs, qui prend ses valeurs parmi 0, -1 et 1. Une inégalité triangulaire donne alors $\frac{1}{|\zeta(z)|} \leqslant \zeta(Re(z)) \leqslant \zeta(a)$. Si l'on se restreint à $\sigma \in [11 + \frac{1}{2} + \delta; 12 + \epsilon]$, on a donc

$$\frac{1}{|\zeta(2(s-11))|} \leqslant \zeta(2(\sigma - 11)) \leqslant \zeta(1 + 2\delta)$$

ce qui permet d'écrire dans le domaine considéré

$$|D(s)| \leqslant \frac{C|\tau|^{26+2(\epsilon-\sigma)}}{|s - 11 - \frac{1}{2}||s-12|\zeta(1+2\delta)}$$

Enfin, étant donné que $\frac{1}{|s-11-\frac{1}{2}||s-12|} \sim \frac{1}{|\tau|^2}$ uniformément dans le domaine considéré, on peut écrire pour τ assez grand

$$|D(s)| \leqslant \frac{2C|\tau|^{24+2(\epsilon-\sigma)}}{\zeta(1+2\delta)}$$

□

3.4 Formule de Perron

Le point-clé pour achever la preuve est la formule suivante due à Perron (1880 - 1975).

Lemme 9 (Formule de Perron)**.** *Soit* $f(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{k^s}$ *une série de Dirichlet d'abscisse de convergence absolue* σ_0*. Alors pour* $\sigma > \sigma_0$ *et* $\sigma > 0$, $\eta \in]0;1[$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$*, on a*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{T \to +\infty} \int_{\sigma - iT}^{\sigma + iT} f(s) \frac{(n+\eta)^s}{s} \frac{ds}{2i\pi}$$

où l'intégrale est prise sur le chemin en ligne droite.

Démonstration. L'idée est de permuter somme et intégrale (possible car on a convergence uniforme sur la droite verticale) et de montrer que la limite

$$\lim_{T\to+\infty}\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT}\frac{x^s}{s}\frac{ds}{2i\pi}$$

vaut 0 si $x\in]0;1[$ et 1 si $x>1$, avec une majoration explicite de l'erreur. Donnons-nous $x>1$. On applique le théorème des résidus au rectangle délimité par les droites $Re(z)=\sigma$, $Im(z)=T$, $Im(z)=-T$ et $Re(z)=\sigma'$ pour $\sigma'<0$, cela donne

$$\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT}\frac{x^s}{s}\frac{ds}{2i\pi}=1+\int_{\sigma'-iT}^{\sigma'+iT}\frac{x^s}{s}\frac{ds}{2i\pi}+\int_{\sigma'+iT}^{\sigma+iT}\frac{x^s}{s}\frac{ds}{2i\pi}-\int_{\sigma'-iT}^{\sigma-iT}\frac{x^s}{s}\frac{ds}{2i\pi}$$

On fait ensuite tendre σ' vers $-\infty$. On a

$$|\int_{\sigma'-iT}^{\sigma'+iT}\frac{x^s}{s}\frac{ds}{2i\pi}|\leqslant\frac{Tx^{\sigma'}}{\pi\sigma'}\to 0$$

comme $x>1$, ainsi que

$$|\int_{-\infty+iT}^{\sigma+iT}\frac{x^s}{s}\frac{ds}{2i\pi}|\leqslant\int_{-\infty}^{\sigma}\frac{x^t}{T}\frac{dt}{2\pi}=\frac{x^\sigma}{2\pi Tln(x)}$$

et de même pour la troisième intégrale. On a donc

$$|\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT}\frac{x^s}{s}\frac{ds}{2i\pi}-1|\leqslant\frac{x^\sigma}{\pi Tln(x)}$$

Si l'on considère maintenant $x\in]0;1[$, le principe est le même est appliquant cette fois-ci le théorème de Cauchy avec $\sigma'>\sigma$ et en faisant tendre σ' vers $+\infty$. On a la même majoration de l'erreur

$$|\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT}\frac{x^s}{s}\frac{ds}{2i\pi}|\leqslant\frac{x^\sigma}{\pi Tln(x)}$$

Ces majorations permettent d'écrire

$$|\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT}f(s)\frac{(n+\eta)^s}{s}\frac{ds}{2i\pi}-\sum_{k=1}^{n}a_k|\leqslant\frac{1}{\pi T}\sum_{k=1}^{+\infty}|a_k|\frac{(n+\eta)^\sigma}{k^\sigma ln(\frac{n+\eta}{k})}$$

Or la suite $(\frac{1}{ln(\frac{n+\eta}{k})})_{k\in\mathbb{N}^*}$ est toujours bien définie (car k ne prend pas la valeur $n+\eta$) et tend vers 0 donc est bornée. La série convergeant de plus absolument en σ, on en déduit que le terme de droite est en $O(\frac{1}{T})$ et en particulier tend vers 0. □

Lemme 10. *Pour $\epsilon > 0$, $\sigma_1 = \frac{23}{2} + \epsilon$, on a*

$$\sum_{k=1}^{n} \tau(k)^2 = \alpha n^{12} + \lim_{\eta \to 0} \lim_{T \to +\infty} \int_{\sigma_1 - iT}^{\sigma_1 + iT} D(s) \frac{(n+\eta)^s}{s} \frac{ds}{2i\pi}$$

Démonstration. On commence par écrire la formule de Perron : si $\sigma_2 = 12 + \epsilon$, $\eta \in]0;1[$,

$$\sum_{k=1}^{n} \tau(k)^2 = \lim_{T \to +\infty} \int_{\sigma_2 - iT}^{\sigma_2 + iT} D(s) \frac{(n+\eta)^s}{s} \frac{ds}{2i\pi}$$

On applique ensuite le théorème des résidus qui donne que l'intégrale est égale à

$$\alpha(n+\eta)^{12} + \int_{\sigma_1 - iT}^{\sigma_1 + iT} D(s) \frac{(n+\eta)^s}{s} \frac{ds}{2i\pi} + \int_{\sigma_1 + iT}^{\sigma_2 + iT} D(s) \frac{(n+\eta)^s}{s} \frac{ds}{2i\pi} - \int_{\sigma_1 - iT}^{\sigma_2 - iT} D(s) \frac{(n+\eta)^s}{s} \frac{ds}{2i\pi}$$

Pour T assez grand, les deux intégrales horizontales peuvent être majorées de façon identique avec une simple inégalité triangulaire

$$\left| \int_{\sigma_1 + iT}^{\sigma_2 + iT} D(s) \frac{(n+\eta)^s}{s} \frac{ds}{2i\pi} \right| \leqslant \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} M T^{23+2(\epsilon-\sigma)} (n+\eta)^\sigma d\sigma = M \frac{T^{-1}(n+\eta)^{\sigma_2} - (n+\eta)^{\sigma_1}}{ln(n+\eta) - 2ln(T)}$$

et tendent donc vers O quand T tend vers $+\infty$. Le résultat en découle en prenant dans l'égalité donnée par le théorème des résidus la limite pour $T \to +\infty$ puis pour $\eta \to 0$. $\square$

Pour conclure, il suffirait de prouver que la grandeur

$$u_n = \lim_{\eta \to 0} \lim_{T \to +\infty} \int_{\sigma_1 - iT}^{\sigma_1 + iT} D(s) \frac{(n+\eta)^{iIm(s)}}{s} \frac{ds}{2i\pi}$$

tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$ (ou du moins ne grandit pas plus vite qu'une puissance de logarithme), ce qui est crédible : c'est une généralisation du lemme de Riemann-Lebesgue à une fonction non intégrable au sens de Lebesgue. On aurait alors l'égalité

$$\sum_{k=1}^{n} \tau(k)^2 = \alpha n^{12} + n^{\sigma_1} u_n$$

ce qui permettrait de montrer légèrement mieux que Rankin : $\tau(n) = O(n^{5,75+\epsilon})$ pour tout $\epsilon > 0$. Encore faudrait-il parvenir à effectivement contrôler le comportement de u_n...

A Factorisation du discriminant modulaire depuis les travaux de Jacobi

Le résultat prouvé par Jacobi qui implique la factorisation du discriminant modulaire est le suivant

Théorème 8 (Jacobi, 1829)**.** *Soit* $k \in]0;1[$, $k' = \sqrt{1-k^2}$,

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-(ksin(\theta))^2}}$$

$$K' = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-(k'sin(\theta))^2}}$$

ainsi que $q = exp(-\pi\frac{K'}{K})$. *Alors on a*

$$k = 4\sqrt{q}\prod_{n=1}^{+\infty}(\frac{1+q^{2n}}{1+q^{2n-1}})^4$$

$$k' = \prod_{n=1}^{+\infty}(\frac{1-q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}})^4$$

$$K = \frac{\pi}{2}\prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^{2n})^2(1+q^{2n-1})^4$$

Le lien avec la fonction elliptique de Weierstrass, non apparent au premier abord, est en réalité très profond. L'idée est que si la fonction $\wp$ était inversible, alors on pourrait réécrire son équation différentielle sous la forme plus simple

$$(\wp^{-1})'(z) = \frac{1}{2\sqrt{(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}}$$

où e_1, e_2 et e_3 sont les trois racines du polynôme $4X^3 - 60G_4X - 140G_6$. La fonction $\wp^{-1}$ pourrait donc être vue comme une intégrale elliptique (en faisant bien sûr attention au problème de la détermination de la racine), avec un polynôme de degré 3 sous la racine. Pour l'intégrale considérée par Jacobi, qui peut se réécrire

$$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-(kt)^2)}}$$

(poser $t = sin(\theta)$), c'est similaire avec un polynôme de degré 4 sous la racine. Mais Legendre (1752 - 1833), dans sa classification des intégrales elliptiques, avait déjà montré que l'on pouvait passer de l'une à l'autre par un changement de variable $z = t^2 + e_i$. Écrivons les choses plus précisément.

Proposition 10. *Soit* $v \in v \in \mathbb{C}\backslash(\mathbb{Z}+z\mathbb{Z})$. *Alors l'ensemble des antécédents de* $\wp(v)$ *par* $\wp$ *est exactement* $(v+\mathbb{Z}+z\mathbb{Z}) \cup (-v+\mathbb{Z}+z\mathbb{Z})$.

Démonstration. La fait que $\wp$ vaut $\wp(v)$ sur cet ensemble découle simplement des propriété de base de $\wp$: 1-périodicité, z-périodicité et parité. Il s'agit de montrer qu'il n'y en a pas d'autre. Pour cela on rappelle que pour un lacet γ suffisamment régulier, l'intégrale

$$\int_\gamma \frac{\wp'(z)}{\wp(z)-\wp(v)}\frac{dz}{2i\pi}$$

est la différence entre le nombre de zéros (avec multiplicités) et le nombre de pôles (avec multiplicités) de $z \mapsto \wp(z)-\wp(v)$ dans le domaine délimité par γ. Si l'on considère un pavé de côtés ω_1 et ω_2 légèrement décentré par rapport à l'origine (pour que γ ne croise pas un pôle), l'intégrale est nulle (car les côtés opposés s'annulent, étant parcourus dans des sens contraires), le nombre de pôles est 2. On en déduit que le nombre de zéros est aussi 2. Si $v \notin \frac{1}{2}(\mathbb{Z}+z\mathbb{Z})$, l'ensemble des zéros considéré a exactement deux points dans ce pavés donc ce sont deux zéros simples et il n'y en a pas d'autre. En revanche, si $v \in \frac{1}{2}(\mathbb{Z}+z\mathbb{Z})$, il n'y a qu'un seul point dans le pavé et il faut montrer que le zéro est double pour conclure. Cela découle du fait que la fonction $\wp'$, qui est impaire, est dans ce cas également $2v$-périodique et on peut donc écrire :

$$\wp'(v) = \wp'(2v-v) = \wp'(-v) = -\wp'(v)$$

d'où $\wp'(v) = 0$ comme ou voulait le montrer. □

Corollaire 3. *La fonction elliptique de Weierstrass est injective lorsque restreinte à l'ensemble*

$$\{\frac{a+bz}{2}; a, b \in [0;1]\}$$

Corollaire 4. *On a*

$$\Delta(z) = \frac{16}{(2\pi)^{12}}(\wp(\frac{z}{2})-\wp(\frac{1}{2}))^2(\wp(\frac{z+1}{2})-\wp(\frac{1}{2}))^2(\wp(\frac{z+1}{2})-\wp(\frac{z}{2}))^2$$

et le discriminant modulaire de s'annule jamais.

Démonstration. On a vu dans la preuve de la proposition que $\wp'$ s'annulait en $\frac{1}{2}$, $\frac{z}{2}$ et $\frac{z+1}{2}$, c'est-à-dire d'après l'équation différentielle que le polynôme $4X^3-60G_4(z)X-140$ s'annule sur les images par $\wp$ ces trois nombres. Or la proposition donne aussi qu'ils sont distincts, ce sont donc les trois racines, d'où suivent les deux assertions de la proposition. □

La suite présentée ici n'est pas rigoureuse car elle fait abstraction de tous les détails techniques, en particulier de détermination des racines. Elle permet tout de même de comprendre pourquoi on attribue la factorisation du discriminant modulaire à Jacobi. On note $e_1 = \wp(\frac{1}{2})$, $e_2 = \wp(\frac{z}{2})$ et $e_3 = \wp(\frac{z+1}{2})$. L'idée est que l'injectivité permet d'écrire

$$\wp^{-1}(z_2) - \wp^{-1}(z_1) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{2\sqrt{(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}}$$

Le changement de variable $z = t^2 + e_3$ donne

$$\wp^{-1}(z_2) - \wp^{-1}(z_1) = \int_{\sqrt{z_1-e_3}}^{\sqrt{z_2-e_3}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+e_3-e_1)(t^2+e_3-e_2)}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{(e_1-e_3)(e_2-e_3)}} \int_{\sqrt{z_1-e_3}}^{\sqrt{z_2-e_3}} \frac{dt}{\sqrt{(1-(\frac{t}{\sqrt{e_1-e_3}})^2)(1-(\frac{t}{\sqrt{e_2-e_3}})^2)}}$$

Puis en faisant encore le changement de variable $u = \frac{t}{\sqrt{e_2-e_3}}$, on trouve

$$\wp^{-1}(z_2) - \wp^{-1}(z_1) = \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}} \int_{\sqrt{\frac{z_1-e_3}{e_2-e_3}}}^{\sqrt{\frac{z_2-e_3}{e_2-e_3}}} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-(ku)^2)}}$$

où l'on a définit un *modulus* $k = \sqrt{\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}}$ complexe. L'égalité précédente appliquée avec $z_1 = e_3$ et $z_2 = e_2$ s'écrit $K = \frac{1}{2}\sqrt{e_1-e_3}$ (on travaille ici à signe près, comme on n'a pas définit la racine). De la même manière, on montre que $K' = -\frac{z}{2}\sqrt{e_3-e_1} = -i\frac{z}{2}\sqrt{e_1-e_3}$. Le théorème de Jacobi se réécrit alors

$$k = \sqrt{\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}} = 4\sqrt{q}\prod_{n=1}^{+\infty}(\frac{1+q^{2n}}{1+q^{2n-1}})^4$$

$$k' = \sqrt{\frac{e_2-e_1}{e_3-e_1}} = \prod_{n=1}^{+\infty}(\frac{1-q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}})^4$$

$$K = \frac{1}{2}\sqrt{e_1-e_3} = \frac{\pi}{2}\prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^{2n})^2(1+q^{2n-1})^4$$

où $q = exp(i\pi z)$ et la factorisation du discriminant modulaire résulte de son écriture en fonction de ses trois quantités

$$\Delta(z) = \frac{16}{\pi^{12}}k^4k'^4K^{12}$$

Un remplaçant bêtement par les produits, on trouve, avec cette fois-ci $q = exp(2i\pi z)$ et où l'on note $\sqrt{q} = exp(i\pi z)$

$$\Delta(z) = q\prod_{n=1}^{+\infty}(1+q^n)^{16}(1-\sqrt{q}^{-1}q^n)^{16}(1+\sqrt{q}^{-1}q^n)^{16}(1-q^n)^{24} = q\prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^{2n})^{16}(1-q^{2n-1})^{16}(1-q^n)^8$$

en utilisant l'identité remarquable $(1+x)(1-x) = 1-x^2$. Cela donne le produit attendu en changeant les indices.

B Preuve directe de la factorisation du discriminant modulaire

La première étape de la preuve, qui a été démontrée dans l'annexe précédente, est la réécriture suivante du discriminant modulaire

$$\Delta(z) = \frac{16}{(2\pi)^{12}}(\wp(\frac{z}{2}) - \wp(\frac{1}{2}))^2(\wp(\frac{z+1}{2}) - \wp(\frac{1}{2}))^2(\wp(\frac{z+1}{2}) - \wp(\frac{z}{2}))^2$$

pour $z \in \mathcal{H}$, où la fonction $\wp$ est associée au réseau $\mathbb{Z} + z\mathbb{Z}$.

On fixe maintenant $z \in \mathcal{H}$ et $\wp$ la fonction elliptique de Weierstrass associée, ainsi que $v \in \mathbb{C}\backslash(\mathbb{Z} + z\mathbb{Z})$, et on considère la fonction $f : u \mapsto \wp(u) - \wp(v)$. Ses pôles sont exactement l'ensemble $\mathbb{Z}+z\mathbb{Z}$, et sont tous d'ordre 2, tandis que ses zéros sont exactement les $(v + \mathbb{Z} + z\mathbb{Z}) \cup (-v + \mathbb{Z} + z\mathbb{Z})$, et sont tous simples (sauf dans le cas particulier où v est de la forme $\frac{1}{2}(\mathbb{Z} + z\mathbb{Z})$, auquel cas les deux réseaux qui forment l'ensemble des zéros coïncident et les zéros sont d'ordre 2).

On note (comme toujours) $q = e^{2i\pi z}$, mais qui est donc ici constant, ainsi que $\zeta = e^{2i\pi u}$, $\xi = e^{2i\pi v}$. Par les propriétés de l'exponentielle complexe, on a les équivalents

$$u \in \mathbb{Z} + z\mathbb{Z} \leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}, \zeta = q^n$$

$$u \in v + \mathbb{Z} + z\mathbb{Z} \leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}, \zeta = \xi q^n$$

$$u \in -v + \mathbb{Z} + z\mathbb{Z} \leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}, \zeta = \xi^{-1} q^n$$

On s'attend donc à ce que f coïncide à un facteur constant près avec la fonction

$$g(u) = \prod_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(\zeta - \xi q^n)(\zeta - \xi^{-1}q^n)}{(\zeta - q^n)^2}$$

On notera déjà que cette fonction converge bien, ce qui se voit en la séparant les indices strictement positifs, strictement négatifs et nul et en les réécrivant

$$g(u) = \frac{(\zeta - \xi)(\zeta - \xi^{-1})}{(\zeta - 1)^2} \prod_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(1 - \zeta\xi q^n)(1 - \zeta\xi^{-1}q^n)(1 - \zeta^{-1}\xi q^n)(1 - \zeta^{-1}\xi^{-1}q^n)}{(1 - \zeta q^n)^2(1 - \zeta^{-1}q^n)^2}$$

Dans cette écriture, chaque facteur définit un produit convergent. On remarque de plus que, comme f, g est une fonction elliptique (elle est à la fois 1-périodique puisque fonction de ζ, et z-périodique comme cela se voit facilement avec la première écriture : remplacer ζ par $q\zeta$ décale simplement l'indice de 1). On en déduit que le quotient f/g est une fonction elliptique holomorphe donc bornée donc constante (selon u). La valeur de cette constante s'obtient en comparant les équivalents au voisinage de $u = 0$ ($\zeta = 1$) :

$$f(u) \sim \frac{1}{u^2}$$

$$g(u) \sim \frac{(1 - \xi)(1 - \xi)^{-1}}{(2i\pi u)^2} \left(\prod_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(1 - \xi q^n)(1 - \xi^{-1}q^n)}{(1 - q^n)^2} \right)^2$$

On a donc prouvé la formule

$$\wp(u) - \wp(v) = (2\pi)^2 \frac{(\xi - \zeta)(1 - \zeta\xi)}{(1 - \zeta)^2(1 - \xi)^2} \prod_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(1 - \zeta\xi q^n)(1 - \zeta\xi^{-1}q^n)(1 - \zeta^{-1}\xi q^n)(1 - \zeta^{-1}\xi^{-1}q^n)}{(1 - \zeta q^n)^2(1 - \zeta^{-1}q^n)^2(1 - \xi q^n)^2(1 - \xi^{-1}q^n)^2}(1-q^n)^4$$

Les cas particuliers qui nous intéressent s'écrivent (où l'on note $\sqrt{q} = e^{i\pi z}$)

$$\wp(\frac{z}{2}) - \wp(\frac{1}{2}) = -\pi^2 \frac{(1+\sqrt{q})^2}{(1-\sqrt{q})^2} \prod_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(1+\sqrt{q}q^n)^2(1+\sqrt{q}^{-1}q^n)^2}{(1-\sqrt{q}q^n)^2(1-\sqrt{q}^{-1}q^n)^2(1+q^n)^4}(1-q^n)^4$$

$$\wp(\frac{z+1}{2}) - \wp(\frac{1}{2}) = -\pi^2 \frac{(1-\sqrt{q})^2}{(1+\sqrt{q})^2} \prod_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(1-\sqrt{q}q^n)^2(1-\sqrt{q}^{-1}q^n)^2}{(1+\sqrt{q}q^n)^2(1+\sqrt{q}^{-1}q^n)^2(1+q^n)^4}(1-q^n)^4$$

$$\wp(\frac{z+1}{2}) - \wp(\frac{z}{2}) = (2\pi)^2 2\sqrt{q}\frac{1+q}{(1-q)^2} \prod_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(1+q^{n+1})(1+q^n)^2(1+q^{n-1})}{(1-q^{2n+1})^2(1-q^{2n-1})^2}(1-q^n)^4$$

En faisant le produit de ces trois expressions cela donne

$$8\pi^6\sqrt{q}\frac{1+q}{(1-q)^2} \prod_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(1+q^{n+1})(1+q^n)^2(1+q^{n-1})}{(1+q^n)^8(1-q^{2n+1})^2(1-q^{2n-1})^2}(1-q^n)^{12}$$

soit encore en faisant des décalages d'indices

$$16\pi^6\sqrt{q}\prod_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(1-q^n)^{12}}{(1+q^n)^4(1-q^{2n-1})^4}$$

L'idée est ensuite d'écrire $1+q^n = \frac{1-q^{2n}}{1-q^n}$ et de réécrire alors le produit au dénominateur

$$\prod_{n\in\mathbb{N}^*}(1-q^{2n})^4(1-q^{2n-1})^4 = \prod_{n\in\mathbb{N}^*}(1-q^n)^4$$

ce qui permet de trouver finalement l'expression

$$(\wp(\frac{z}{2}) - \wp(\frac{1}{2}))(\wp(\frac{z+1}{2}) - \wp(\frac{1}{2}))(\wp(\frac{z+1}{2}) - \wp(\frac{z}{2})) = \frac{(2\pi)^6}{4}\sqrt{q}\prod_{n\in\mathbb{N}^*}(1-q^n)^{12}$$

En mettant au carré puis en multipliant par le facteur $\frac{16}{(2\pi)^{12}}$, on trouve bien la factorisation annoncée

$$\Delta(z) = q\prod_{n\in\mathbb{N}^*}(1-q^n)^{24}$$

C Développements d'Euler de la cotangente et du sinus

Théorème 9. *Pour $z \in \mathbb{C}$, on a*

$$cot(z) = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{z-n\pi} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2z}{z^2-(n\pi)^2}$$

$$sin(z) = \lim_{N\to+\infty}\prod_{n=-N}^{N} 1 - \frac{z}{n\pi} = z\prod_{n=1}^{+\infty} 1 - (\frac{z}{n\pi})^2$$

Démonstration. Notons S la fonction de droite dans la première égalité. La cotangente et S sont deux fonctions méromorphes avec les mêmes pôles, de mêmes degrés et de mêmes résidus. Ainsi la fonction $S - cot$ est holomorphe sur tout le plan complexe. Elle est de plus π-périodique donc pour la borner il suffit de le faire dans la bande $-\frac{\pi}{2} \leqslant Re(z) \leqslant \frac{\pi}{2}$. Puisque $|cot(z)| \underset{|Im(z)|\to+\infty}{\to} 1$, la cotangente est bornée lorsque l'on s'écarte de la droite réelle. Par ailleurs

$$|S(z)| \leqslant \frac{1}{|z|} + 2|z|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{|z^2-n^2|}$$

Pour minorer $|z^2 - n^2|$, l'idée est que $z = |z|e^{i\theta}$ est quasiment imaginaire pur (θ arbitrairement proche de $\frac{\pi}{2}$ si l'on s'éloigne suffisamment de l'axe réel), donc $z^2 = |z|^2 e^{2i\theta}$ est quasiment un nombre négatif (2θ arbitrairement proche de π), et donc $|z^2 - n^2|$ est proche de $|z|^2 + n^2$. On peut en tout cas, en prenant une partie imaginaire assez grande, avoir $|z^2 - n^2| \geqslant \frac{|z|^2}{2} + n^2$ d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{|z^2-n^2|} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\frac{|z|^2}{2}+n^2} \leqslant \int_0^{+\infty}\frac{dt}{\frac{|z|^2}{2}+t^2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}|z|}$$

ce qui prouve que S est également bornée lorsque l'on s'éloigne de la droite réelle. Par le théorème des bornes et le théorème de Liouville, on en déduit que $S - cot$ est constante. Enfin, $S(z) - \frac{1}{z} \underset{z\to 0}{\to} 0$ et $cot(z) - \frac{1}{z} \underset{z\to 0}{\to} 0$ d'où la première égalité.

Pour obtenir l'égalité sur le sinus, il faut regarder que les deux fonctions s'annulent en 0 et qu'en prenant les dérivées logarithmiques, on obtient les fonctions de la première égalité. Le théorème de Cauchy-Lipschitz donne alors le résultat. □

D Fonctions Gamma et Bêta d'Euler

La fonction Gamma d'Euler est un prolongement de la factorielle des entiers aux nombres complexes. On remarque d'abord que pour $n, m \in \mathbb{N}$

$$(n+m)! = n!(n+1)...(n+m) = m!(m+1)...(m+n)$$

avec $(m+1)...(m+n) \underset{m\to+\infty}{\sim} m^n$ d'où

$$n! = \underset{m\to+\infty}{lim}\frac{m!m^n}{(n+1)...(n+m)}$$

La fonction Gamma est définie à partir de cette caractérisation,

$$\Gamma(z) = \underset{m\to+\infty}{lim}\frac{m!m^{z-1}}{z(z+1)...(z+m-1)}$$

pour $z \in \mathbb{C}\backslash\{0, -1, -2, ...\}$. La limite existe bien (et est non nulle) car le rapport du terme de rang m+1 sur celui de rang m est

$$\frac{(m+1)(m+1)^{z-1}}{(m+z)m^{z-1}} = \frac{1+\frac{1}{m}}{1+\frac{z}{m}}(1+\frac{1}{m})^{z-1} = (1+\frac{1}{m})(1-\frac{z}{m}+O(\frac{1}{m^2}))(1+\frac{z-1}{m}+O(\frac{1}{m^2})) = 1+O(\frac{1}{m^2})$$

On voit à partir de la définition que la fonction Gamma vérifie l'équation fonctionnelle

$$\forall z \in \mathbb{C}\backslash\{0,-1,-2,...\} \;\; \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

C'est encore Euler qui, dans les pas de Wallis (1616 - 1703), étudie la fonction Bêta définit pour $x, y \in \mathbb{C}$ avec $Re(x) > 0, Re(y) > 0$ par

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

Théorème 10 (Euler). — *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$, $\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{+\infty}(1+\frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}}$

— *(Formule des compléments) Pour tout* $z \in \mathbb{C}$, $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{sin(\pi z)}$

— *Pour* $z \in \mathbb{C}$ *avec* $Re(z) > 0$, *on a* $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$

— *Pour* $x, y \in \mathbb{C}$ *avec* $Re(x) > 0, Re(y) > 0$, *on a* $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

La dernière égalité permet en particulier d'étendre la fonction Bêta à tous les complexes $x, y \in \mathbb{C}\backslash\{0,-1,-2,...\}$.

Démonstration. — Pour $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(z)} &= \lim_{m\to+\infty} \frac{z(z+1)...(z+m-1)}{(m-1)!m^z} \\
&= \lim_{m\to+\infty} zm^{-z}(1+z)(1+\frac{z}{2})...(1+\frac{z}{m-1}) \\
&= \lim_{m\to+\infty} zexp(z(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{m-1}-ln(m)))\prod_{n=1}^{m-1}(1+\frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}} \\
&= ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{+\infty}(1+\frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}}
\end{aligned}$$

— Pour $z \in \mathbb{C}$,

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \frac{1}{-z\Gamma(z)\Gamma(-z)} = z\prod_{n=1}^{+\infty}1-(\frac{z}{n})^2 = \frac{sin(\pi z)}{\pi}$$

— On prouve simultanément les troisième et quatrième points en étudiant la fonction Bêta. Donnons-nous $x, y \in \mathbb{C}$ avec $Re(x) > 0, Re(y) > 0$. Par simple linéarité de l'intégrale, on a $B(x+1,y)+B(x,y+1) = B(x,y)$. Par ailleurs une intégration par parties donne $B(x+1,y) = \frac{x}{y}B(x,y+1)$. On a donc $B(x,y) = \frac{x+y}{y}B(x,y+1)$, puis en itérant $B(x,y) = \frac{(x+y)...(x+y+m-1)}{y...(y+m-1)}B(x,y+m-1)$ avec

$$B(x,y+m-1) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y+m-1}dt = \int_0^m (\frac{t}{m})^{x-1}(1-\frac{t}{m})^{y+m-1}\frac{dt}{m}$$

et donc

$$B(x,y) = \frac{(x+y)...(x+y+m-1)}{m!m^{x+y-1}} \frac{m!m^{y-1}}{y...(y+m-1)} \int_0^m t^{x-1}(1-\frac{t}{m})^{m+y-1}dt$$

Puis par théorème de convergence dominée, on obtient

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$

Pour conclure et obtenir simultanément les deux résultats, il suffit de remarquer que le cas particulier $y = 1$ donne

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt = B(x,1)\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(1)} = \frac{1}{x}\frac{\Gamma(x+1)}{1} = \Gamma(x)$$

□

Il est enfin intéressant de noter que l'expression intégrale peut se réécrire

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt = \int_0^1 t^{z-1}(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-t)^n}{n!})dt + \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n} + \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$$

L'intégrale définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, tandis que la série converge en dehors des pôles de Γ, donnant que ses pôles sont simples avec l'expression des résidus associés.

E Formules de Stirling

Rappelons la formule de Stirling, que l'on considère ici connue.

Théorème 11 (Formule de Stirling)**.**

$$n! \sim (\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi n}$$

L'objectif de cette annexe est de démontrer des formules plus générales que celle-ci, décrivant le comportement de la fonction Gamma en l'infini en dehors des entiers. La fonction Gamma apparaissant dans l'équation fonctionnelle de la fonction zêta (annexe F) et de la fonction D (section 3), ces formules permettront de trouver des majorations des prolongements de ces fonctions.

Théorème 12 (Formule de Stirling complexe)**.** *On note $\sqrt{.}$ la racine associée à la branche principale du logarithme et définie sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$. Alors pour $s \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$,*

$$\Gamma(s) = (\frac{s}{e})^s\sqrt{\frac{2\pi}{s}}\ exp\left(-\int_0^{+\infty}\frac{t-\lfloor t\rfloor-\frac{1}{2}}{t+s}dt\right)$$

Démonstration. On notera que l'intégrale converge bien puisque pour $N \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{N+1} \frac{t - \lfloor t \rfloor - \frac{1}{2}}{t+s} dt = \sum_{n=0}^{N} \int_0^1 \frac{u - \frac{1}{2}}{n+u+s} du = \sum_{n=0}^{N} 1 - (n+s+\frac{1}{2})(ln(n+s+1) - ln(n+s))$$

avec $1 - (n+s+\frac{1}{2})(ln(n+s+1) - ln(n+s)) = O(\frac{1}{n^2})$.

Il suffit de traiter le cas $s \in \mathbb{R}_+^*$, la formule étant alors automatiquement vraie pour $s \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_-$ par unicité du prolongement analytique. Pour $s \in \mathbb{R}_+^*$, les grandeurs manipulées sont toutes positives ce qui permet d'utiliser facilement le logarithme. On part de l'égalité

$$-ln(\Gamma(s)) = ln(\frac{1}{\Gamma(s)}) = ln(s) + \gamma s + \sum_{n=1}^{+\infty} ln(1 + \frac{s}{n}) - \frac{s}{n}$$

Or pour $N \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire

$$\sum_{n=1}^{N} ln(1 + \frac{s}{n}) - \frac{s}{n} = \sum_{n=1}^{N} ln(n+s) - ln(N!) - sH_N$$

où (H_N) est la série harmonique. La formule de Stirling (classique) se réécrit

$$ln(N!) = (N + \frac{1}{2})ln(N) - N + \frac{1}{2}ln(2\pi) + o(1)$$

Par ailleurs on peut réécrire la somme

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} ln(n+s) - \int_0^N ln(t+s)dt &= \int_0^N (ln(\lfloor t \rfloor + 1 + s) - ln(t+s))dt \\
&= \int_0^N \int_t^{\lfloor t \rfloor + 1} \frac{dudt}{u+s} \\
&= \int_0^N \frac{u - \lfloor u \rfloor}{u+s} du \\
&= \int_0^N \frac{u - \lfloor u \rfloor - \frac{1}{2}}{u+s} du + \frac{1}{2}(ln(N+s) - ln(s))
\end{aligned}$$

avec $\int_0^N ln(t+s)dt = (N+s)ln(N+s) - (N+s) - sln(s) + s$ d'où

$$\sum_{n=1}^{N} ln(n+s) = (N + s + \frac{1}{2})ln(N+s) - N - (s + \frac{1}{2})ln(s) + \int_0^N \frac{u - \lfloor u \rfloor - \frac{1}{2}}{u+s} du$$

En remplaçant, cela donne

$$\sum_{n=1}^{N} ln(1+\frac{s}{n}) - \frac{s}{n} = (N+\frac{1}{2})ln(1+\frac{s}{N}) + s(ln(N+s) - H_N) - (s+\frac{1}{2})ln(s) - \frac{1}{2}ln(2\pi) + \int_0^N \frac{u - \lfloor u \rfloor - \frac{1}{2}}{u+s} du + o(1)$$

et donc en passant à la limite pour $N \to +\infty$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ln(1+\frac{s}{n}) - \frac{s}{n} = s - \gamma s - (s+\frac{1}{2})ln(s) - \frac{1}{2}ln(2\pi) + \int_0^{+\infty} \frac{u - \lfloor u \rfloor - \frac{1}{2}}{u+s}$$

puis

$$ln(\Gamma(s)) = (s-\frac{1}{2})ln(s) - s + \frac{1}{2}ln(2\pi) - \int_0^{+\infty} \frac{u - \lfloor u \rfloor - \frac{1}{2}}{u+s}$$

La formule en découle en passant à l'exponentielle. □

Corollaire 5 (Formule de Stirling verticale)**.** *Pour $\sigma \in \mathbb{R}$, on a*

$$|\Gamma(\sigma + i\tau)| \sim \sqrt{2\pi} e^{-\sigma - \frac{\pi}{2}|\tau|} |\tau|^{\sigma - \frac{1}{2}}$$

quand $|\tau| \to +\infty$.

Démonstration. L'exponentielle tend vers 1 quand s diverge, et donc si $s = \sigma + i\tau$,

$$|\Gamma(s)| \sim |(\frac{s}{e})^s \sqrt{\frac{2\pi}{s}}| = \sqrt{2\pi} e^{-\sigma} |s^{s-\frac{1}{2}}|$$

Il suffit alors de voir que

$$|s^{s-\frac{1}{2}}| = exp((\sigma - \frac{1}{2})ln(|s|) - \tau Arg(s)) \sim exp((\sigma - \frac{1}{2})ln(|\tau|) - \frac{\pi}{2}|\tau|)$$

□

F Fonction zêta de Riemann

La fonction zêta de Riemann (1826 - 1866) est d'abord définie sur le demi-plan complexe $Re(z) > 1$ par la formule

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

où le produit, dit eulérien, est pris sur tous les nombres premiers (comme ce sera le cas, sans être reprécisé, de tous les produits ou sommes sur p dans la suite). Euler déjà avait prouvé que l'on pouvait donner un sens à $\zeta(-n)$ pour tout les entiers naturels n, et avait conjecturé une invariance de la fonction zêta comme Riemann le prouvera. C'est en revanche bien Riemann, le premier, qui étendra la fonction au plan complexe.

Théorème 13 (Riemann, 1859)**.** *La fonction zêta admet un prolongement méromorphe sur l'ensemble du plan complexe, avec un unique pôle, simple, de résidu 1, en 1. De plus la fonction $z \mapsto \pi^{-z}\Gamma(z)\zeta(2z)$ est invariante par la transformation $z \mapsto \frac{1}{2} - z$.*

Démonstration. La preuve suivante, remontant à Riemann, repose sur le lien entre séries de Dirichlet et formes modulaires, sujet encore actif de recherche. Il se trouve que la fonction $z \mapsto \pi^{-z}\Gamma(z)\zeta(2z)$ est "quasiment" la transformée de Mellin d'une fonction thêta de Jacobi $\theta : z \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i\pi n^2 z}$ (pour $Im(z) > 0$) prise sur l'axe imaginaire. Plus précisément, pour $z \in \mathbb{C}$ avec $Re(z) > \frac{1}{2}$, on a

$$\int_0^{+\infty} (\theta(it) - 1)t^z \frac{dt}{t} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\pi n^2 t} t^z \frac{dt}{t} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\pi n^2)^z} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^z \frac{dt}{t} = \frac{2\Gamma(z)}{\pi^z}\zeta(2z)$$

Par ailleurs, la formule sommatoire de Poisson donne l'équation de modularité de la fonction thêta : pour $t > 0$,

$$\theta(it) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi u^2 t} e^{-2i\pi n u} du = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\pi n^2}{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}}\theta(\frac{i}{t})$$

On a donc

$$\int_0^{+\infty} (\theta(it)-1)t^z \frac{dt}{t} = \int_1^{+\infty} [(\theta(it)-1)t^{z-1} + (\theta(\frac{i}{t})-1)\frac{1}{t^{z+1}}]dt = \int_1^{+\infty} [(\theta(it)-1)t^{z-1} + (\sqrt{t}\theta(it)-1)\frac{1}{t^{z+1}}]dt$$

soit

$$\begin{aligned}
\frac{2\Gamma(z)}{(\pi)^z}\zeta(2z) &= \int_1^{+\infty} [(\theta(it) - 1)t^{z-1} + (\theta(it) - 1 + 1 - \frac{1}{\sqrt{t}})t^{-z-\frac{1}{2}}]dt \\
&= \int_1^{+\infty} (\theta(it) - 1)(t^{z-1} + t^{-z-\frac{1}{2}})dt + \int_1^{+\infty} (t^{-z-\frac{1}{2}} - t^{-z-1})dt \\
&= \int_1^{+\infty} (\theta(it) - 1)(t^{z-1} + t^{(\frac{1}{2}-z)-1})dt - \frac{1}{\frac{1}{2} - z} - \frac{1}{z}
\end{aligned}$$

L'intégrale est convergente pour tout z complexe d'où le prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$. L'invariance se déduit aussi immédiatement de cette expression. Γ n'a pas de pôle en $\frac{1}{2}$ d'où le pôle annoncé pour ζ en 1 avec ses propriétés. Le pôle de Γ en 0 annule celui de droite et fait que ζ n'a pas d'autre pôle (et même que $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$). □

Il est aussi intéressant d'exprimer $z \mapsto \Gamma(z)\zeta(z)$ comme une transformée de Mellin. On a pour $z \in \mathbb{C}$, $Re(z) > 1$

$$\Gamma(z)\zeta(z) = \int_0^{+\infty} \frac{t^z}{e^t - 1}\frac{dt}{t}$$

En effet,

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^z}{e^t - 1}\frac{dt}{t} = \int_0^{+\infty} t^z e^{-t}(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt})\frac{dt}{t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-t}(\frac{t}{n+1})^z \frac{dt}{t} = \Gamma(z)\zeta(z)$$

où l'interversion série-intégrale est justifiée par le théorème de convergence dominée. Si l'on introduit les nombres de Bernoulli définis par $\frac{t}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} t^n$, on peut alors écrire pour $z \in \mathbb{C}$, $Re(z) > 1$

$$\Gamma(z)\zeta(z) = \int_0^1 t^{z-2}(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} t^n)dt + \int_1^{+\infty} \frac{t^z}{e^t-1}\frac{dt}{t}$$

La deuxième intégrale définit une fonction holomorphe sur le plan complexe, tandis que

$$\int_0^1 t^{z-2}(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} t^n)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!}\frac{1}{n+z-1}$$

ce qui définit une série convergente en dehors de $1, 0, -1, -2, ...$ Connaissant les résidus de la fonction Gamma, on en déduit les valeurs de la fonction zêta sur les entiers négatifs : pour $n \in N$,

$$\zeta(-n) = \frac{B_{n+1}/(n+1)!}{(-1)^n/n!} = (-1)^n \frac{B_{n+1}}{n+1}$$

On peut déduire de tout cela la valeur de ζ sur les entiers positifs pairs. En effet, par l'équation fonctionnelle, pour $n = 2k$ avec $k \geqslant 1$, on a

$$\zeta(2k) = \pi^{2k-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-k)}{\Gamma(k)} \zeta(1-2k) = -\pi^{2k-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-k)}{(k-1)!}\frac{B_{2k}}{2k}$$

avec

$$\Gamma(\frac{1}{2}-k) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})...(\frac{1}{2}-k)} = (-1)^k \frac{2^k\Gamma(\frac{1}{2})}{1.3...(2k-1)} = (-1)^k \frac{2^{2k}k!\Gamma(\frac{1}{2})}{(2k)!}$$

et par la formule des compléments

$$\Gamma(\frac{1}{2})^2 = \Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(1-\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{sin(\frac{\pi}{2})} = \pi$$

d'où la célèbre formule d'Euler $\zeta(2k) = (-1)^{k+1}\frac{(2\pi)^{2k}B_{2k}}{2(2k)!}$.

G Résultats classiques sur les formes modulaires

Proposition 11. *Le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ est engendré par $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $-I_2$.*

Démonstration. On a pour $n \in \mathbb{Z}$, $T^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et par conséquent

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} T^n = \begin{pmatrix} a & b+na \\ c & d+nc \end{pmatrix}$$

On peut donc remplacer b par son reste modulo a. Par ailleurs,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix}$$

donc on peut inverser les rôles de a et b. En itérant on peut donc se ramener à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$. Mais alors $ad = 1$ donc soit $a = d = 1$ soit $a = d = -1$. On écrit alors

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} ST^n = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -d & c - nd \end{pmatrix}$$

ce qui donne $-S$ pour $n = c$ si $d = 1$, et S pour $n = -c$ si $d = -1$. □

Proposition 12. *Toute forme modulaire admet un développement en série de Fourier sans coefficients strictement négatifs, c'est-à-dire une écriture de la forme*

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n e^{2i\pi nz} = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n q^n$$

où l'on dénote, ici comme par la suite, $q = e^{2i\pi z}$. On a les développements en série de Fourier explicites

$$G_k(z) = 2\frac{(2i\pi)^k}{(k-1)!}\left(-\frac{B_k}{2k} + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sigma_{k-1}(n) q^n\right)$$

où $\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}$ et les (B_k) sont les nombres de Bernoulli.

Démonstration. On suppose ici connu le résultat que toute fonction d'une variable réelle 1-périodique et de classe C^1 admet un développement en série de Fourier partout convergeant. Pour $y > 0$, si l'on applique cela à la fonction $x \mapsto f(x + iy)$, il vient que pour $x \in \mathbb{R}$

$$f(x + iy) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(y) e^{2i\pi x}$$

avec $a_n(y) = \int_{-1/2}^{1/2} f(x + iy) e^{-2i\pi x} dx$. Cela se réécrit

$$f(x + iy) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(y) e^{-2i\pi . iy} e^{2i\pi(x+iy)}$$

avec $a_n(y) e^{-2i\pi . iy} = \int_{-1/2}^{1/2} f(x + iy) e^{-2i\pi(x+iy)} dx$ indépendant de y d'après le théorème de Cauchy. On a donc une écriture $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n q^n$ pour tout $z \in \mathcal{H}$, et les coefficients a_n pour $n < 0$ sont nécessairement nuls sinon f ne serait pas bornée en l'infini.

Les développements en série de Fourier des séries d'Eisenstein peuvent se déduire de l'écrite de la cotangente en somme infinie (c.f. annexe C)

$$cot(z) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{z - n\pi}$$

On peut écrire d'autre part pour $z \in \mathcal{H}$

$$cot(z) = i\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}} = -i\frac{1+e^{2iz}}{1-e^{2iz}} = -i(1+e^{2iz})\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{2inz} = -i\left(1+2\sum_{n\in\mathbb{N}^*} e^{2inz}\right)$$

d'où

$$\frac{1}{\pi}\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{z+n} = cot(\pi z) = -i\left(1+2\sum_{n\in\mathbb{N}^*}^{q}{}^{n}\right)$$

En dérivant $k-1$ fois ($k \geqslant 2$), on obtient

$$\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(z+n)^k} = -2i(2i\pi)^{k-1}\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n^{k-1}q^n$$

soit

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(z+n)^k} = \frac{(-2i\pi)^k}{(k-1)!}\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n^{k-1}q^n$$

On peut alors écrire

$$\begin{aligned}
G_k(z) &= 2\zeta(k) + 2\sum_{m\in\mathbb{N}^*}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(mz+n)^k} \\
&= 2\zeta(k) + 2\frac{(-2i\pi)^k}{(k-1)!}\sum_{m\in\mathbb{N}^*}\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n^{k-1}q^{mn} \\
&= (-1)^{k/2+1}\frac{(2\pi)^k B_k}{k!} + 2\frac{(2i\pi)^k}{(k-1)!}\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\sigma_{k-1}(n)q^n \\
&= 2\frac{(2i\pi)^k}{(k-1)!}\left(-\frac{B_k}{2k} + \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\sigma_{k-1}(n)q^n\right)
\end{aligned}$$

□

Proposition 13. *L'ensemble*

$$\mathcal{F} = \{z \in \mathcal{H} \parallel |Re(z)| < \frac{1}{2}, |z| > 1\}$$

est un domaine fondamental pour l'action de $PSL_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathcal{H}$, c'est-à-dire que toute orbite rencontre $\overline{\mathcal{F}}$, et qu'une orbite ne peut rencontrer $\mathcal{F}$ qu'une seule fois.

Démonstration. Soit $z \in \mathcal{H}$. On se donne $c, d \in \mathbb{Z}$ minimisant $|cz+d|$. La condition implique que c et d sont premiers entre eux, et par le théorème de Bézout on peut introduire $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$. On pose alors $\tilde{z} = T^n A.z$ où $n \in \mathbb{Z}$ est défini de telle sorte que $|Re(\tilde{z})| \leqslant \frac{1}{2}$. La relation

$$Im(\tilde{z}) = Im(A.z) = \frac{Im(z)}{|cz+d|^2}$$

dit que $Im(\tilde{z})$ est le maximum de $Im(\gamma.z)$ pour $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$. On ne peut pas alors avoir $|\tilde{z}| < 1$ car sinon il viendrait que

$$Im(ST^nA.z) = Im(S.\tilde{z}) = \frac{Im(\tilde{z}}{|\tilde{z}|^2} > Im(\tilde{z})$$

ce qui est, comme on vient de l'expliquer, impossible. On a donc $\tilde{z} \in \overline{\mathcal{F}}$.

Supposons maintenant par l'absurde que l'on ait $z_2 = \gamma.z_1$ avec $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL_2(\mathbb{Z})$, $z_1, z_2 \in \mathcal{F}$. La condition sur les parties réelles impose que γ n'est pas de la forme T^n, et donc $c > 0$. On note que pour $z \in \mathcal{F}$, on a $Im(z) > \frac{\sqrt{3}}{2}$. On écrit

$$\frac{\sqrt{3}}{2} < Im(z_2) = \frac{Im(z_1)}{|cz_1 + d|^2} \leqslant \frac{Im(z_1)}{c^2 Im(z_1)^2} < \frac{2}{\sqrt{3}c^2}$$

Cela se réécrit $c^2 < \frac{4}{3}$ et impose donc $c = 1$. Mais alors on a $|z_1 + d|^2 = (Re(z_1) + d)^2 + (Im(z_1))^2 \geqslant |z_1|^2 > 1$ puisque les conditions $|Re(z_1)| < \frac{1}{2}$ et $d \in \mathbb{Z}$ imposent $|Re(z_1) + d| \geqslant |Re(z_1)|$. On a donc

$$Im(z_2) = \frac{Im(z_1)}{|cz_1 + d|^2} < Im(z_1)$$

Or par symétrie on a aussi $Im(z_1) < Im(z_2)$ d'où une contradiction. □

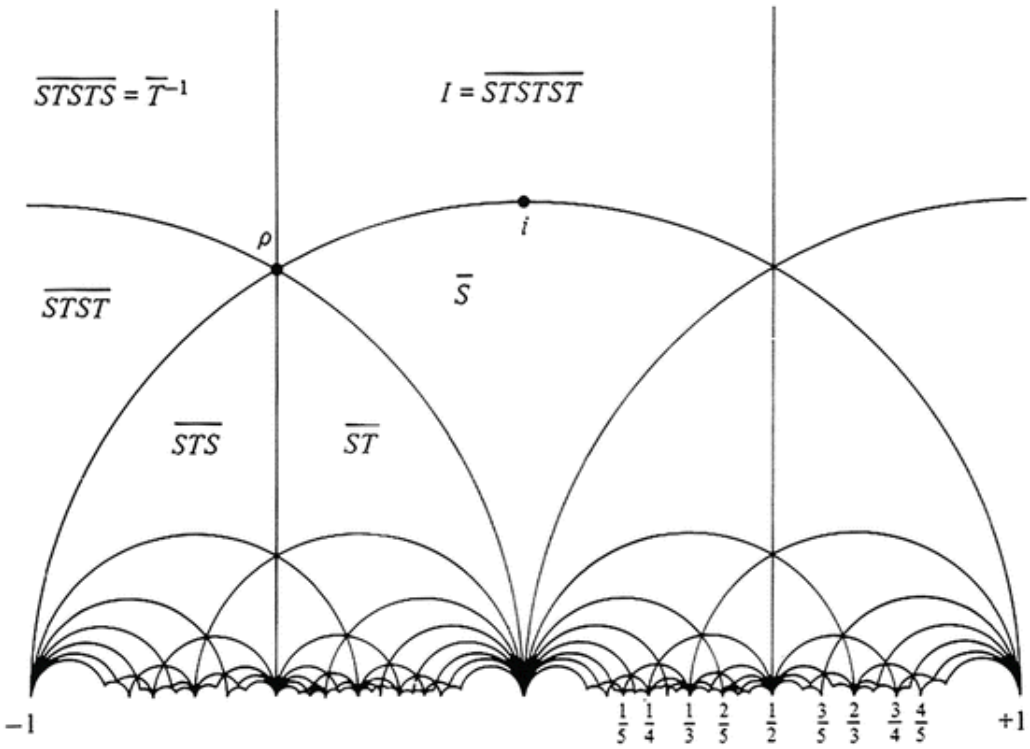
Théorème 14. *La dimension de l'espace des formes modulaires de poids k est égale à*

- 0 *si k est impair ou $k < 0$*
- $\lfloor \frac{k}{12} \rfloor$ *si k est positif et congru à 2 modulo 12*
- $\lfloor \frac{k}{12} \rfloor + 1$ *si k est positif, pair, et non congru à 2 modulo 12*

Démonstration. C'est connu pour k impair, on suppose donc k pair. La preuve utilise le fait que le discriminant modulaire ne s'annule pas sur $\mathcal{H}$, et que son zéro en l'infini est simple. Ce sont des conséquences de son écriture en produit infini, mais l'absence de zéro dans $\mathcal{H}$ est aussi démontrée de façon plus directe dans l'annexe A et il est facile de vérifier que $\tau(1) = 1 \neq 0$ à partir des premiers coefficients de Fourier de G_4 et G_6.

- $k = 0$: Soit f une forme modulaire de poids 0. On note (a_n) ses coefficients de Fourier. Supposons d'abord que $|f(z)| \leqslant |a_0|$ pour tout $z \in \overline{F}$. Alors la fonction $u \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u^n$ définie sur le cercle unité admet un maximum local en 0 donc est constante, c'est-à-dire que $a_n = 0$ pour $n \geqslant 1$, et donc f est constante. Si l'on suppose maintenant qu'il existe $z_0 \in \overline{\mathcal{F}}$ tel que $|f(z_0)| > |a_0|$, on a donc $|f(z)| < |f(z_0)|$ pour $Im(z)$ suffisamment grand, et la description de $\mathcal{F}$ ainsi que le théorème des bornes assurent que f restreinte à $\overline{\mathcal{F}}$ atteint un maximum. Or l'équation de modularité donne alors que ce maximum est le maximum de f sur $\mathcal{H}$, c'est donc en particulier un maximum local et on trouve à nouveau que f est constante. On a donc bien un espace de dimension 1 : les fonctions constantes.
- $k < 0$: Par le même raisonnement, on prouve que f une forme modulaire de poids $k < 0$ pair admet nécessairement un maximum lorsque restreinte à $\overline{\mathcal{F}}$. Il se trouve que ce maximum est ici aussi un maximum local. En effet, les domaines qui bordent

$\mathcal{F}$ sont ses images par T, $T^{-1} = -(ST)^2S$, S, ST, STS, $(ST)^2$, $ST^{-1} = -(TS)^2$, $ST^{-1}S = TST$ et $(ST^{-1})^2 = -TS$.



Les équations de modularité correspondantes s'écrivent $f(z+1) = f(z)$, $f(z-1) = f(z)$, $f(-\frac{1}{z}) = z^k f(z)$, $f(-\frac{1}{z+1}) = (z+1)^k f(z)$, $f(-\frac{z}{z-1}) = (z-1)^k f(z)$, $f(-\frac{z+1}{z}) = z^k f(z)$, $f(-\frac{1}{z-1}) = (z-1)^k f(z)$, $f(\frac{z}{z+1}) = (z+1)^k f(z)$ et $f(\frac{z-1}{z}) = z^k f(z)$. Or pour $z \in \overline{\mathcal{F}}$, z, $z-1$ et $z+1$ sont tous les trois de module au moins 1, donc de module au plus 1 une fois à la puissance $k < 0$. Cela prouve donc qu'aucune valeur plus grande est prise dans les domaines bordant $\mathcal{F}$ (bien qu'il peut y en avoir autre part). L'existence d'un maximum local donne que f est constante. Or la seule constante vérifiant l'équation de modularité pour S est 0 : on a bien prouvé qu'il n'existait pas de forme modulaire de poids strictement négatif.

— $k \geqslant 4$: Soit f une forme modulaire avec l'un de ces poids k. On peut introduire $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $f - \lambda G_k$ soit parabolique. Alors la fonction $g = \frac{f-\lambda G_k}{\Delta}$ est bien une forme modulaire (holomorphe car Δ ne s'annule pas sur $\mathcal{H}$, bornée en l'infini car le zéro du dénominateur est annulé par celui du numérateur) de poids $k-12$. L'écriture $f = \lambda G_k + \Delta g$ permet d'exhiber un isomorphisme $\mathcal{M}_k \simeq \mathbb{C}G_k \oplus \Delta\mathcal{M}_{k-12}$, qui donne le résultat par récurrence à partir des cas de bases $-8 \leqslant k \leqslant 2$ ($k = 2$ étant démontré ci-dessous en utilisant les cas $k = 4$ et $k = 6$ qui ne reposent pas sur $k = 2$).

— $k = 2$: Supposons par l'absurde que l'on ait f une forme modulaire de poids 2. D'après le point précédent, on peut écrire $G_4 = \lambda f^2$ et $G_6 = \mu f^3$ pour $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. On a donc $\Delta = ((60\lambda)^3 - 27(140\mu)^2)f^6$. On en déduit que f n'a pas de zéro, ni dans $\mathcal{H}$ (sinon Δ en aurait un), ni en l'infini (puisque celui de Δ est simple). Mais alors f^{-1} définit une forme modulaire de poids -2. Contradiction.

□

Références

[1] Don Zagier. Elliptic modular forms and their applications.

[2] Ben Brubaker. Spaces of modular forms. 2008.

[3] Srinivasa Ramanujan. On certain arithmetical functions. 1916.

[4] R. A. Rankin. Contributions to the thory of ramanujan's function $\tau(n)$ and similar arithmetical functions. 1939.

[5] E. C. Tichmarsh. The theory of functions. 1939.

[6] Carl Gustav Jacob Jacobi. *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*. 1829.

[7] Paramanand Singh. Elliptic functions. 2011.

[8] Takashi Ichikawa. Infinite products and number theory.

[9] George E. Andrews, Richard Askey, and Ranjan Roy. *Special Functions*. 1999.

[10] Gerald Tenenbaum. Introduction to analytic and probabilistic number theory. 2015.

[11] Bernhard Riemann. Ueber die anzahl der primzahlen unter einer gegebenen grösse. 1859.